

Geometría Diferencial 2009

Práctica 1 - Variedades y funciones diferenciables

1. Sea M una variedad diferenciable, $\dim(M) = d$, y sea (U, ϕ) una carta de M .
 - a) Probar que si $V \subset U$ es un abierto, entonces $(V, \phi|_V)$ es una carta compatible de M .
 - b) Probar que si $f : \phi(U) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^d$ es un difeomorfismo, entonces $(U, f \circ \phi)$ es una carta compatible de M .
2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión d .
 - a) Probar que M admite un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ tal que $\phi_i(U_i)$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d \forall i$.
 - b) Probar que M admite un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ con $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^d \forall i$.
3. Sea M una variedad diferenciable y sea $U \subset M$ abierto. Probar que U hereda una estructura de variedad, y que la inclusión $U \rightarrow M$ es diferenciable para esa estructura. Probar que $\dim(U) = \dim(M)$.
4. Sean M y N variedades diferenciales. Probar que el producto cartesiano $M \times N$ es naturalmente una variedad, y que las proyecciones $M \times N \rightarrow M$ y $M \times N \rightarrow N$ son diferenciables. Probar que $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$.
5. Sea M una variedad diferenciable, y sea G un grupo que actúa en M por difeomorfismos: para cada $g \in G$ se tiene $\phi_g : M \rightarrow M$ difeomorfismo de modo que $\phi_e = id_M$ y $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$. La acción es propiamente discontinua si se satisface
 - i) $\forall p \in M \exists U$ abierto, $p \in U \subset M$, tal que $\phi_g(U) \cap U = \emptyset \forall g \neq e$.Probar que si la acción es propiamente discontinua, entonces el conjunto de órbitas M/G es una variedad diferenciable con la estructura inducida por M , la proyección $M \rightarrow M/G$ es diferenciable y $\dim(M) = \dim(M/G)$.
6. Sea $G \curvearrowright M$ como en el ejercicio anterior. Probar que si la acción también satisface
 - ii) dados $p, q \in M$ puntos en distintas órbitas, existen abiertos U, V , $p \in U \subset M$, $q \in V \subset M$, tales que $\phi_g(U) \cap V = \emptyset \forall g$.entonces M/G es T2, y que si M es N2 entonces M/G también lo es.
7. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, sea $a \in \mathbb{R}$ fijo, y sea $M = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = a, \text{ y } D_p F \neq 0\}$. Probar que M es una variedad diferenciable, con las cartas dadas por el teorema de la función implícita. Probar que la inclusión $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, y que $\dim(M) = n - 1$.

8. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y exhibir un atlas en cada caso.

- a) V espacio vectorial sobre \mathbb{R} , $d = \dim V$;
- b) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $d = n$;
- c) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$;
- d) $T_n = S^1 \times \dots \times S^1$, $d = n$;
- e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, $d = 2$;
- f) $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, $d = n^2$;
- g) $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, $d = n^2 - 1$;
- h) $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^t = 1\}$, $d = n(n - 1)/2$.

9. Sea $M = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre M : una es (id, \mathbb{R}^n) ; la otra es (ϕ, U) , donde $U = M - \{0\}$, $\phi(p) = p$ si $p \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que $\mathcal{A} = \{(id, \mathbb{R}^n), (\phi, U)\}$ es un atlas para M , pero que M no resulta una variedad T2 con esta estructura.

10. Considerar en \mathbb{R} las siguientes cartas: (\mathbb{R}, id) ; y (\mathbb{R}, φ) , $\varphi(x) = x^3$. Probar que las dos cartas no son compatibles, pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.

11. Sea M la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$, junto con la estructura inducida por la carta de (M, f^{-1}) . Probar que la función $F : M \rightarrow M$, definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.

12. Probar que $\mathcal{D}(M, \mathbb{R}) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si $g : M \rightarrow N$ es diferenciable, entonces $g^* : \mathcal{D}(N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ es un morfismo de anillos.

13. Sea $p \in M$. Probar que el conjunto de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de p , $\mathcal{D}_p(M)$, es un anillo. Probar que si $g : M \rightarrow N$ es diferenciable, entonces $g^* : \mathcal{D}_{g(p)}(N) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ es un morfismo de anillos.

14. Sea $p \in M$; probar que la aplicación cociente $f \mapsto \bar{f}$ da un morfismo de anillos $\mathcal{D}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$.