Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°8: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Utilizar el método de Euler para resolver $\begin{cases} y' = 2y & \text{en } [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   empleando pasos $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.01$. Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

2. Hacer el mapa de curvas integrales en la región $[0,10] \times [0,10]$ de la ecuación diferencial

   $$y'(t) = (y(t) - 5).(\cos^2(t) - 0.5),$$

   graficando simultáneamente, para $k = 0, 1, \ldots, 10$, la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso $h = 0.01$ y con condición inicial

   $$y(0) = k.$$

3. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

   (a) Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

   $$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

   (b) Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero a medida que x crece.

   (c) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

4. Se considera el problema

   $$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 3 & \text{en } [0,2] \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

   (a) Demostrar que la solución es una función convexa.

   (b) Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso $h = 0.05$ para obtener dos aproximaciones de la solución y graficarlas. Decidir en que región del gráfico deberá situarse la solución analítica del problema.

   (c) Graficar la solución que se logra al utilizar el comando **ode45** de `Matlab`.

5. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

   $$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\sin(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

   cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$. Graficar simultáneamente en el intervalo $[0,4]$ la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso $h = 0.05$.

6. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 5 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en dicho ejercicio.

7. Verificar que la función error, **erf**, puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial
$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$
Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar $\text{erf}(t_i)$ con $t_i = 0, 0.05,$ $0.1,\ 0.15, \ldots, 1$. Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando **erf** de `Matlab`.

8. Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

9. Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

10. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(t)$ es solución de $y' = y,\ y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

11. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.
    (a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.
    (b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?
    (c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

12. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:
$$\begin{cases} y'(t) = & t \sin^2(y(t)) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

13. La trayectoria de una partícula que se se mueve en el plano está dada por las curva $(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:
$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1(t) - y_2(t) \end{array} .$$
Resolver este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$. Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

14. Probar que una ecuación de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

15. Considerar el siguiente problema:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Resolver la ecuación analíticamente y aproximar el valor $y(1)$ con un método de Runge-Kutta de orden 2 para distintos valores de h.

16. Considerar la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$.

   (a) Deducir la fórmula de Milne:

   $$y_n = y_{n-2} + h\big(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}\big),$$

   aproiximando la integral

   $$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t))dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t)dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

   con la fórmula de Simpson. Sugerencia: Tener en cuenta el Ejercicio 16 de la Práctica 7.

   (b) Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

   $$y_{n+1} - y_n = h\big[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}\big].$$

   (c) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su órden.

17. Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su órden.

   - **Adams-Bashforth.**

   $$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

   - **Adams-Moulton.**

   $$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

18. Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

19. Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$