Práctica 8: Espacios Normados

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

(a) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) $\times E \to E$ son continuas.

(b) $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$ (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

(c) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subseteq E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\, x, y \in C$ y $\forall\, t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

(a) Probar que $B(x,r)$ es convexo.

(b) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ lo es.

(c) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.

(d) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

Ejercicio 4. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

(a) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} :\ \exists\ \lim_{n\to\infty} x_n\} \subseteq l^\infty$

(b) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_n \to 0\} \subseteq c$

(c) $\mathbb{R}[X]$ (polinomios en una variable) $\subseteq \mathcal{C}[0,1]$

(d) $\mathcal{C}^1[a,b] \subseteq \mathcal{C}[a,b]$

Ejercicio 5. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ una operador lineal. Probar que son equivalentes:

(a) T es continuo en 0.

(b) $\exists\ x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

(e) $\exists\ M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x \in M$. ($T$ es *acotado*)

(f) $\forall A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 6. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos

$$L(E,F) = \{T : E \to F /\ T \text{ es lineal y continua}\},$$

y para cada $T\ \in L(E,F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

(a) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

(b) Si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

Ejercicio 7. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M/\ \|Tx\| \leq M\|x\|\}$$

Ejercicio 8. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 9. Sea $f : (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$. Probar que f es lineal pero no es continua.

Ejercicio 10. Sean S, T: $\ell^1 \to \ell^1$, definidos por

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots) \\ T(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, \ldots) \end{aligned}$$

Probar que S, $T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma :$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

(a) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

(b) Probar que existen $c_1,\ c_2 > 0$ tales que $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Deducir que si N_1, N_2 son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (esto es: son equivalentes).

Ejercicio 12. Sean E un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim(T) < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 13. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subsetneq E$ un subespacio cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E \setminus S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha$ $\forall s \in S$. (Sugerencia: Considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.)

Ejercicio 14. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B(0,1)}$ no es compacta. (Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.)

Ejercicio 15. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subseteq E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $\gamma : E \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) lineal, $\gamma \neq 0$ tal que $H = \ker(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

Ejercicio 16. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.