Práctica 7: Conexión

Conexión

Ejercicio 1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x| < 2\} \quad , \quad \mathbb{N} \quad , \quad [0,1) \quad , \quad \mathbb{Q}$$

$$\{\tfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad B(a,\varepsilon) \text{ en un espacio métrico } (X,d).$$

Ejercicio 2. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ no sea conexo. Idem para $A \setminus B$.

Ejercicio 3. Sean X un espacio métrico y $C \subseteq X$.

(a) Probar que si C es conexo y x es un punto de acumulación de C, entonces $C \cup \{x\}$ es conexo.

(b) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:

i. Si C es conexo, entonces C° es conexo.

ii. Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $C \subseteq X$. Probar que son equivalentes:

(a) C es conexo.

(b) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

(c) Si $A \subseteq C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

(d) Toda función $f : C \to \{0,1\}$ continua es constante.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8.

(a) Probar que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

(b) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la recíproca?

(c) Probar que si (X,d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 9. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

(a) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$

(b) $\mathbb{Q}$

(c) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$

(d) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

(a) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X

(b) Si $B \subseteq X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subseteq B$ ó $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Arco Conexión

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

(a) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

(b) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 13. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x,y)\}$, donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

(b) $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Ejercicio 14. Sean (X,d) un espacio métrico arcoconexo, (Y,d') un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 15. Un espacio métrico (X,d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subseteq X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subseteq U$. Probar que:

(a) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff$ A es arcoconexo

(b) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

(c) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

(d) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

(e) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 16. En el espacio $(C[0,1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \ \forall\, x \in [0,1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.