Práctica 6: Compacidad - Continuidad uniforme

Compacidad

Ejercicio 1.

(a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

(b) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.

(c) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 3. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía.
Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) X es compacto.

(b) Toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

(c) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

(d) X es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente).

(e) X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 6. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

(a) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

(b) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

(c) Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subseteq X$.

Ejercicio 7. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

(a) Demostrar que para cada $x \in c_0$ la bola cerrada $B[x, 1] = \{y \in c_0 \ / \ d_\infty(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

(b) Probar que (c_0, d_∞) es separable.

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos no vacíos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') lo son.

Ejercicio 9. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que K tiene mínimo y máximo.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico.

(a) Sean $K \subseteq X$ un compacto no vacío y sea $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K "se realiza".

(b) Sean F, $K \subseteq X$ dos subconjuntos disjuntos no vacíos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.

(c) Sean $K_1, K_2 \subseteq X$ dos subconjuntos compactos no vacíos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 "se realiza".

(d) Si en el item anterior pedimos que K_1 sea compacto, pero que K_2 sólo sea cerrado, sigue valiendo el resultado?

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

(a) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$ en general.

(b) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subseteq B(A, \varepsilon)$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subseteq X$.

(c) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada si en $X \times Y$ se considera la métrica d_∞.

Ejercicio 16. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

(a) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

(b) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

(c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Continuidad uniforme

Ejercicio 18.

(a) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

(b) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

(c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c\, d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 20.

(a) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   I. $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$

   II. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

   entonces f no es uniformemente continua en A.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 21.

(a) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

(b) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 22.

(a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 23. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 24. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subseteq X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

Ejercicio 25. Sea X un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$ localmente compactos. Probar que $A \cap B$ es localmente compacto.

Ejercicio 26. Sea X un espacio métrico localmente compacto y sean $G \subseteq X$ un abierto y $F \subseteq X$ un cerrado. Probar que $G \cap F$ es localmente compacto.

Ejercicio 27. Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ localmente compacto. Probar que existe un abierto $G \subseteq X$ y un cerrado $F \subseteq X$ tales que $Y = G \cap F$.