

PRÁCTICA 5: CONTINUIDAD

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$. Probar que:

- (a) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ converge a $f(x_0)$.
- (b) Son equivalentes:
- I. f es continua.
 - II. Para todo $G \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X .
 - III. Para todo $F \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

Ejercicio 2. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua.
- (b) Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ es continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua.
- (c) Si $X = \bigcup_{i=1}^m F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ es continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua.
- (d) Si $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ y $f|_{X_i}$ es continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 4. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- (a) $f : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.
- (b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.
- (c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.
- (d) $i : (E, d) \rightarrow (X, d)$, la inclusión, donde $E \subseteq X$.

Ejercicio 5. Sean $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \quad g(x) = x \cdot f(x) \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n}, (m:n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

- (a) f es discontinua en todo punto.
- (b) g sólo es continua en $x = 0$.
- (c) h es continua en $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 6. Probar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 7. Métricas topológicamente equivalentes:

- (a) Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

- (b) Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ es un homeomorfismo.
- (c) Consideramos en \mathbb{R} la métrica $d'(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$.

Probar que (\mathbb{R}, d') es topológicamente equivalente a \mathbb{R} con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, pero que (\mathbb{R}, d') no es completo.

Ejercicio 8. Considerando en cada \mathbb{R}^n la métrica euclídea, probar que:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 9. Consideramos las funciones $E, I : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ y } I(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

- (a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$, la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
- (b) Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , I es una función continua pero E no lo es.
- (c) Analizar si es posible que una función $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .

Ejercicio 10. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el *gráfico* de f , definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$ con la métrica d_∞ . ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X . Probar que la función $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 12. *Teorema de Urysohn.*

Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X .

(a) Probar que existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0 \quad , \quad f|_B \equiv 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

(b) Deducir que existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \rightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que:

(a) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$.

(b) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subseteq X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subseteq X$.

(a) Probar que si f es biyectiva entonces, f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

(b) Dar un ejemplo de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua que no sea abierta.

(c) Dar un ejemplo de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua que no sea cerrada.

(d) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.

(a) Probar que f es continua si y sólo si $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

(b) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

Ejercicio 16.

(a) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subseteq X$ denso. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 17. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suryectiva.

(a) Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

(b) ¿Es cierto que si X es completo, entonces Y es completo?

Ejercicio 18. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ .

- (a) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

- (b) Sea (Z, δ) un espacio métrico y sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) < f(x) + \varepsilon \quad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)).$$

Probar que:

- (a) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0 .
- (b) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (c) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (d) Si $A \subseteq X$ es un abierto \mathcal{X}_A es semicontinua inferiormente, y si $F \subseteq X$ es un cerrado \mathcal{X}_F es semicontinua superiormente.