# Práctica 4: Espacios Métricos

**Ejercicio 1.** Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

**Ejercicio 2.** Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \;/\; \exists\, n_0 : a_n = 0 \;\forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

**Ejercicio 3.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

(a) $X$ es separable.

(b) $X$ posee una base numerable de abiertos.

(c) Todo cubrimiento abierto de $X$ tiene un subcubrimiento numerable.

**Ejercicio 4.** Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

**Ejercicio 5.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de $X$ no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de $X$ es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 6.** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si $(X, d)$ e $(Y, d')$ lo son. Recordar que $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$.

**Ejercicio 7.** Probar que $(\ell^1, d_1)$ es separable.

**Ejercicio 8.** ¿Es el espacio $(\ell^\infty, d_\infty)$ separable?

**Ejercicio 9.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Probar:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

(b) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 10.** Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico $X$ es un subespacio completo de $X$, entonces $X$ es completo.

**Ejercicio 11.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico.

(a) Probar que todo subespacio completo de $(X, d)$ es un subconjunto cerrado de $X$.

(b) Probar que si $X$ es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de $X$.

**Ejercicio 12.** (Teorema de Cantor). Probar que un espacio métrico $(X, d)$ es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $X$ cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ tiene un único punto en la intersección.

**Ejercicio 13.** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si $(X, d)$ e $(Y, d')$ son completos.

**Ejercicio 14.**

(a) Sea $X$ un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

(c) Sea $\mathcal{C}_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$. Probar que $(\mathcal{C}_0, d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

**Ejercicio 15.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subseteq X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ converge en $X$. Probar que $X$ es completo.

**Ejercicio 16.** Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

**Ejercicio 17.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea $D$ un subconjunto denso y numerable de $X$. Probar que $D$ no es un $G_\delta$.

**Ejercicio 18.** Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
*Sugerencia:* Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar el conjunto

$$U_n = \Big\{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \mathrm{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\Big\}.$$

**Ejercicio 19.** Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

(a) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

(b) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.