Práctica 3: Espacios Métricos

Thought is only a flash between two long nights, but this flash is everything. Henri Poincare (1854 - 1912).

I would never die for my beliefs because I might be wrong. Bertrand Russell (1872 - 1970)

Métricas en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 2. Sea G la colección de todas las bolas $B(q,r)$ de $\mathbb{R}^n$ con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que existe $B \in G$ tal que $x \in B \subseteq S$.

Ejercicio 3. (Teorema de Lindelöf) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C = (W_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de C que cubre a A.

Ejercicio 4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda bola $B(x)$ centrada en x tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable, entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que la colección de puntos aislados de S es a lo sumo numerable.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \le i \le 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|,$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y|, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.

(a) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

i. $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

ii. $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$.

iii. $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

(b) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Ejercicio 8. Sean $p, p' \in \mathbb{R}$, tales que $1 < p, p' < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(a) (Desigualdad de Young) Probar si $x, y \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, entonces

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}.$$

(b) (Desigualdad de Hölder) Probar que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Sugerencia: reducirla al caso $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{1/p'} = 1$.

(c) (Desigualdad de Minkowski) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Sugerencia: utilizar la desigualdad de Hölder.

(d) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define $d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$. Probar que d_p es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

Espacios Métricos

Ejercicio 9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
NOTA: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 10. Sea $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}\}$. Se considera $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|.$$

Probar que (ℓ^1, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 11. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 12. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua }\}$. Probar que los siguientes son espacios métricos:

(a) $(C[a, b], d_1)$, con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

(b) $(C[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 13. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Probar que las siguientes aplicaciones definen métricas en el conjunto $X_1 \times X_2$

(a) $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

(b) $d_\infty : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Ejercicio 14.

(a) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X *topológicamente equivalente* a d, es decir, que todo conjunto $U \subseteq X$ es abierto para d' si y sólo si lo es para d.

(b) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

(c) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que existe una distancia que hace de $X^{\mathbb{N}}$ un espacio métrico.

Ejercicio 15. Mostrar que las métricas d_∞ y d_2 definidas en el ejercicio 7 son topológicamente equivalentes.

Propiedades topológicas

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$.

(a) Probar las siguientes propiedades sobre el *interior* de un conjunto:

i. $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G\subseteq A}} G.$

ii. $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$.

iii. $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$.

iv. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

v. $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

(b) Probar las siguientes propiedades sobre la *clausura* de un conjunto:

i. $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A\subseteq F}} F.$

ii. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.

III. $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

IV. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

V. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

VI. $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

(c) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

I. $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$.

II. $\overline{X - A} = X - A^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

(d) Probar las siguientes propiedades sobre la *frontera* de un conjunto:

I. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.

II. ∂A es cerrado.

III. $\partial A = \partial(X - A)$.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 18. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $B[a, r] = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

(a) Probar que $B[a, r]$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq B[a, r]$.

(b) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $B[a, r]$.

Ejercicio 19. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el item (a) del ejercicio 13. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

(a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

(a) Probar las siguientes propiedades sobre el *derivado* de un conjunto:

I. A' es cerrado.

II. $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$.

III. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

IV. $\overline{A} = A \cup A'$.

V. $(\overline{A})' = A'$.

(b) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 21. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1)\cup\{2\}.$$

Ejercicio 22. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

(a) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

(b) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

(c) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

(d) I. Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$. Idem con $[0,1]$.
  II. Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.

  ¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 23. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Probar las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (y por lo tanto compacto).

(b) $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C}=\mathcal{C}'$ y no vacío).

(c) $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.

(d) $x\in\mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.

Ejercicio 24. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Probar que si $P\subseteq X$es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 25.

(a) Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ y no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar que:

  I. $S-T$ es numerable.
  II. $S\cap T$ es no numerable.
  III. T es un conjunto cerrado.
  IV. T no posee puntos aislados.

(b) *Teorema de Cantor-Bendixon.* Probar que si F es un conjunto cerrado no numerable de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse en la forma $F=A\cup B$, donde A es perfecto y B es numerable.

Ejercicio 26. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

(a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y)$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Distancias a conjuntos

Ejercicio 27. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) \;/\; a \in A\}$. Probar:

(a) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$.

(b) $x \in A \implies d(x, A) = 0$.

(c) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(d) $B(A, r) = \{x \in X \;/\; d(x, A) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$.

(e) $B[A, r] = \{x \in X \;/\; d(x, A) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$.

Ejercicio 28. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \;/\; a \in A \;,\; b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$.

(b) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

(c) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(d) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.