Uno de los hábitos de la mente es la invención de imaginaciones horribles (...) ha imaginado las ideas platónicas, la quimera, la esfinge, los anormales números transfinitos (donde la parte no es menos copiosa que el todo), las máscaras, los espejos... - Jorge L. Borges

No one shall expel us from the Paradise that Cantor has created. - David Hilbert

PRÁCTICA 2: CARDINALIDAD

Propiedades básicas de los conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

(a) $B \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

(b) $B \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

(c) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big)$.

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

– $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

– $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$.

– $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

(a) Demostrar que:

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

ii. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(b) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

(c) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en (a) ii. sea estricta.

Ejercicio 4. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar (d) y (e) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 5. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) f es inyectiva.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subseteq X$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$.

(d) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$.

(e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todos $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 7. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}.$$

Probar que:

(a) $\mathcal{X}_{S\cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.

(b) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.

(c) $\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S\cup T} + \mathcal{X}_{S\cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$.

Cardinalidad

Ejercicio 8. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 9. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

(a) A es infinito (i.e. tiene un subconjunto en biyección con $\mathbb{N}$).

(b) Para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \to A \setminus \{x\}$ biyectiva.

(c) Para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$, existe una función $f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} : A \to A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 10. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B. Probar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 11. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3.\mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 12.

(a) Sean A y B conjuntos a lo sumo numerables. Probar que $A \cup B$ es a lo sumo numerable.

(b) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\#(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 13. Sean A y B conjuntos, A infinito y B numerable. Probar que existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

Ejercicio 14. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 15. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \dots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

(a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

(b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

(c) Probar que, más aún, existen tantos números trascendentes como números reales.

Ejercicio 16. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\#(\{x \in \mathbb{R} \ / \ f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0.$$

Ejercicio 18. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 19. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

(a) $\{(a_n) \ / \ a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \ / \ a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \ / \ a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} \ / \ \lim_{n \to \infty} q_n = 0\}$.

(e) $\{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} \ / \ (q_n) \text{ es periódica}\}$.

(f) $\{(a_n) \subseteq \mathbb{N} \ / \ 1 \leq a_n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$. $\qquad (m \in \mathbb{N})$

Ejercicio 20. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{I \ / \ I$ es un intervalo de extremos racionales$\}$.

(b) $\{[a,b] \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

(c) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y \geq 7\}$.

(e) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 21. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 22. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

(a) $a.(b + c) = a.b + a.c$

(b) $a^{b+c} = a^b.\ a^c$

(c) $(a^b)^c = a^{bc}$

(d) $(ab)^c = a^c.\ b^c$

(e) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$.

Ejercicio 23. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 24. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\mathbb{Q}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ \mathcal{C}(\mathbb{Q}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\} \end{array}$$

(a) Probar que $\#(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

(b) Calcular $\#(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

(c) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

(d) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

(e) Calcular $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 25. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.