Práctica 1: Números Reales

La Recta Real

Ejercicio 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que

$$s = \sup A \iff \begin{array}{rl} i) & s \text{ es cota superior de } A. \\ ii) & \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : s - \varepsilon < a \le s. \end{array}$$

Ejercicio 2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$.

(a) Verificar que $A_x \neq \emptyset$ y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de A_x. Este número se llama la *parte entera de* x y se notará $[x]$.

(b) Demostrar que:

i. $0 \le x - [x] < 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
ii. $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
iii. $[x + y] \le [x] + [y] + 1$.
iv. $x < y \Rightarrow [x] \le [y]$.

Ejercicio 3.

(a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

(c) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

Ejercicio 4.

(a) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \ge x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

(b) Probar un enunciado análogo donde $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea estrictamente creciente.

Ejercicio 5. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$.

Ejercicio 6. Sea $A = \left\{ \dfrac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.
Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \dfrac{m}{b^n} \Big/ m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>1}$.

Sucesiones

Ejercicio 7. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

(a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 8.

(a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:

  I. Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞?

  II. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

(c) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.

(d) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y explicar porqué la respuesta no contradice ningún resultado conocido.

Límite superior e inferior

Ejercicio 9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera $A_n = \{a_k : k \geq n\}$. Sean $\lambda_n = \sup A_n$ y $\gamma_n = \inf A_n$.

(a) Probar que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Concluir que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes. Al límite de la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$) lo llamaremos *límite superior* (resp. *límite inferior*) de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y lo notaremos $\limsup a_n$ (resp. $\liminf a_n$).

(b) Sean $\alpha = \liminf a_n$ y $\beta = \limsup a_n$, y sea $\varepsilon > 0$. Probar que a la derecha de $\beta + \varepsilon$ y a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ existen a lo sumo finitos términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 10. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

(a) $1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ \ldots$.

(b) $(-1)^n\Big(2 + \dfrac{3}{n}\Big)$.

(c) $\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)\ \mathrm{sen}\Big(n\dfrac{\pi}{2}\Big)$.

(d) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \dfrac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + s_{2n}$.

(e) $\dfrac{n}{3} - \Big[\dfrac{n}{3}\Big]$.

Ejercicio 11. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

(a) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica:

i. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $a_n < \alpha + \varepsilon$.

ii. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \varepsilon$.

(b) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i. Existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$.

ii. Si $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} \leq \alpha$.

Ejercicio 12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ acotada. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 13. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

(a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

(b) $\limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$, si $a_n, b_n \geq 0$.

(c) si $c > 0$ entonces, $\limsup(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$.

Probar resultados análogos para $\liminf$.

Ejercicio 14. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Probar que: $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

(b) Deducir que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}_\infty$ entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

(c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Desarrollos b-arios

Ejercicio 15. Sean $x, y \in [0,1]$ dos números reales dados por sus desarrollos en base $b \in \mathbb{N}_{>1}$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{b^i} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{b^i} \quad (0 \leq x_i, y_i < b - 1).$$

Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $i_0 \in \mathbb{N}$ existe $i > i_0$ con $y_i > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$.

(a) Probar que si $x_n < y_n$, entonces $x < y$.

(b) Deducir que, si suponemos que el desarrollo de x también es infinito, el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.

(c) Sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$.

Ejercicio 16. Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2,25; 10,7; 27 y 255.