Práctica 10: Diferenciación

Diferenciación

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b), derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ y tal que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos.

(a) Probar que f es derivable lateralmente en x_0. Deducir que si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0 y calcular $f'(x_0)$.

(b) Mostrar que los resultados de (a) pierden validez si se omite la hipótesis de continuidad de f en x_0.

Ejercicio 3. Sean $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ derivable en (α, β) y $\alpha < a < b < \beta$ tales que $f'(a) \neq f'(b)$.

(a) Probar que si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Probar que si λ es un número real tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

(c) Sea $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$,

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}), t^2 \cos(\frac{1}{t})) & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ (0, 0) & \text{si} \quad -1 < t \leq 0. \end{cases}$$

Probar que g es derivable en todo $t \in (-1, 1)$, pero que $g'((-1, 1))$ no es conexo.

Ejercicio 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Probar que si f es diferenciable en $x_0 \in A$, existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subseteq A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

Ejercicio 5. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al segmento que une x_1 y x_2.

(a) Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe x en el segmento que une x_1 y x_2 tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

(b) Mostrar con un ejemplo que el resultado no vale para funciones vectoriales.

(c) Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable que verifica $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$. Probar que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Ejercicio 6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.

Ejercicio 7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para todo par de puntos $x, y \in A$. Probar que f es constante.

Ejercicio 8. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales acotadas. Probar que f es continua.

Teoremas de la Función Inversa e Implícita.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Mostrar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de $t = 0$.
Deducir que la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa, incluso en el caso $n = 1$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

(a) Verificar que f no es inyectiva.

(b) Comprobar que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Deducir que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo $x \in U$.

(a) Probar que f es abierta.

(b) Probar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto.

Ejercicio 12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

(a) Hallar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subseteq \mathbb{R}^2$ del punto $(1, 0)$ y una función $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\varphi(1, 0) = 2$ y $F(xz, \varphi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

(b) Probar que $x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) - z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) = 2x$ para todo $(x, z) \in W$.

Ejercicio 13. Probar que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen}(x) - y^2 + z^3 & = & 0 \\ -\ln(1 + x) + y^2 z & = & 1 \end{cases}$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0, 1, 1)$. Sean $C \subseteq \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ y la función $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan(x)$. Calcular la derivada direccional de g en el punto $(0, 1, 1)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 0$.