PRÁCTICA 3: INTEGRAL DE LEBESGUE

Ejercicio 1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea f definida sobre $E \in \Sigma$,una función medible y no negativa. Probar que si E es medible entonces

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple} \right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

(a) Probar que si $f \geq 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Concluir que

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx$$

(b) Si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale

$$\int_{R^n} f\left(\frac{x}{a}\right)\, dx \quad = \quad a^n \int_{R^n} f(x)dx.$$

Ejercicio 4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sea $E \in \Sigma$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $\left|\int_E f d\mu\right| = \int_E |f| d\mu$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E.

Ejercicio 5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sea $E \in \Sigma$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $\int_A f d\mu = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$. Probar que $f = 0$ a.e. en E.

Ejercicio 6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \in \Sigma$ y sea f integrable sobre E. Probar que si $\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$, entonces $f_n \overset{\mu}{\to} f$ sobre E. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe g integrable sobre $[0,+\infty)$, continua y tal que para una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

Ejercicio 8. Sea $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Sea f integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y $Q_k = [-k,k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| d\mu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ejercicio 9. Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

Ejercicio 10. Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

Ejercicio 11. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre $E \in \Sigma$. Si $\lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_k d\mu.$$

Ejercicio 12.

(a) Sea (X, Σ, μ), sea E medible y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E,\mu)$. Mostrar que

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 13. Si $f \in L^1(0,1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0,1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ejercicio 14. Probar que para cada $g \in L^1([0,\infty))$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n x g(x) dx = 0.$$

Ejercicio 15. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^m$ y g integrable sobre $\mathbb{R}^m$ tales que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea f una función tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

a.e. Probar que para todo $a > 0$, si llamamos $E_k = \bigcup_{n \geq k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{k \to \infty} |E_k| = 0$. Deducir que $f_n \overset{m}{\to} f$.

Ejercicio 16. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0, 1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0, 1)$, existe $\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0, 1)$.
(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x)|\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n + 1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n - 1/3)\pi]^{-1/2}, n \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 17. Sea (X, Σ, μ)un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones integrables tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty,$$

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Ejercicio 18. Sean $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n + 1)x^n$. Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

Ejercicio 19. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E, entonces $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$.

(b) Probar que si E es de medida finita y $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$ entonces f es integrable sobre E.

Ejercicio 20. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0, 1]$ e integrable sobre $[0, 1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0, 1]$ medible.

Ejercicio 21. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \overset{\mu}{\to} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Ejercicio 22. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

1. para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función de (x,y) acotada.

Probar que

(a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.

Ejercicio 23. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int\limits_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \longrightarrow 0$ probar que $f_n \overset{\mu}{\to} 0$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{\mu}{\to} 0$, probar que $\int\limits_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \longrightarrow 0$.

Ejercicio 24. Sean $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = \sharp(A)$. Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_X f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.