Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2009

Práctica 6

Topologías débiles

1. Sea E un espacio de Banach, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que $\|x_n\|$ está acotada y que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

   (Sug: usar Principio de Acotación uniforme y la inclusión canónica en el bidual)

2. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

3. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$.

   a) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

   b) Si $\dim E < \infty$, $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

4. *a*) Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal. φ es continua si y sólo si φ es continua de (E, w) en $\mathbb{C}$.

   b) Sean E y F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w).

5. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.

6. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.

7. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $B = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. En (E, w), S tiene interior vacío.

8. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

9. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

10. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.

    a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

    b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

11. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

    a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

    b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

12. Sean $\varphi_n : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f\left(\frac{-1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

13. Si $1 \leq p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

    b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

14. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces

$$x^n \xrightarrow{w} x \iff \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \ \ \forall k$$

15. a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \iff \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\,dt \to \int_0^a \varphi(t)\,dt \ \ \forall a \in [0,1]$$

    b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

16. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0,1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \iff M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \ \ \forall f \in L^2[0,1]$$

17. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

18. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

    a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

    b) Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ y que $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.

    c) $c_0 \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1,\varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\perp\langle\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\rangle \supset \ \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿ Ocurre lo mismo con ${}^\perp\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\rangle$?

19. a) Si E es un espacio vectorial, $f_1,\ldots,f_n, f : E \to \mathbb{C}$ son transformaciones lineales tales que $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle\{f_i\}_i\rangle$

    b) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existen $c > 0$, $x_1,\ldots,x_n \in E$ tales que

$$|f(\varphi)| \leq c \max_{1\leq i\leq n} |\varphi(x_i)| \qquad \forall \varphi \in E'$$

    c) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existe $x \in E$ tal que $f(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in E'$

20. Sean E un espacio de Banach, $J : E \to E''$ la inclusión canónica.

    a) $J(B_E)$ es fuertemente cerrado, donde B_E es la bola unidad cerrada de E.

    b) Dar un ejemplo en el que J no sea suryectiva.

21. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.

22. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.

    a) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0 \, / \varphi(x) = \|\varphi\| \, \|x\|$

    b) Si M es un subespacio cerrado propio de E', $\exists x \in {}^{\perp}M$, $\|x\| = 1 \, / \, \varphi(x) = d(\varphi, M)$

23. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que E es separable si y sólo si S y E/S lo son.

24. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^*-convergente.

    (Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E, $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_n}\}_n$ es w^*-convergente)

25. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

    a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión $w-$convergente. (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

    b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E', entonces tiene una subsucesión w^*-convergente.

26. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E'$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

27. Sea E un espacio de Banach separable, y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en B_E. Probar que la topología débil* en $B_{E'}$ puede darse mediante la métrica

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{2^n}$$

28. Sea $H_0^1[0,1] = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$ (siendo H^1 el espacio de Sobolev)y $(u_n)_{n\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,1)$. Probar que si $u_n \xrightarrow{w} u$, entonces existe una subsucesión u_{n_k} tal que $u_{n_k} \to u$ en $C[0,1]$ (Esto dice que la inclusión $i : H_0^1[0,1] \to C[0,1]$ es un operador compacto)