

## Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2009

### PRÁCTICA 5 - OPERADORES ACOTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT

1. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Entonces:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|, \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle|$$

2. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T, S \in \mathcal{L}(H)$ ,  $T^*, S^* \in \mathcal{L}(H)$  sus operadores adjuntos.

a)  $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$ .

b)  $(ST)^* = T^*S^*$ .

c)  $\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$ .

3. Si  $H$  es un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$  se verifica:

a)  $\ker(T) = R(T^*)^\perp$

b)  $(\ker(T))^\perp = \overline{R(T^*)}$

c)  $\ker(T^*) = R(T)^\perp$

d)  $(\ker(T^*))^\perp = \overline{R(T)}$

4. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T_n \in \mathcal{L}(H)$  tales que  $\sup_n |\langle T_n x, y \rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$ , entonces  $\sup_n \|T_n\| < \infty$ .

5. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Son equivalentes:

a)  $T$  es una isometría

b)  $T^*T = I$

c)  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$

**Definiciones:** Sea  $T \in \mathcal{L}(H)$ ,  $H$  Hilbert.

a)  $T$  es autoadjunto si  $T^* = T$

b)  $T$  es normal si  $T^*T = TT^*$

c)  $T$  es unitario si es inversible y  $T^{-1} = T^*$

d)  $T$  es positivo si  $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

6. a) Si  $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ , sea  $M_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  el operador de multiplicación. Calcular  $M_\varphi^*$ , probar que  $M_\varphi$  es normal y caracterizar  $\{\varphi \in L^\infty[0, 1] : M_\varphi \text{ es unitario}\}$ .
- b) Si  $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$ , sea  $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dado por  $Ax = (\alpha_n x_n)_n$ . Calcular  $A^*$ , probar que  $A$  es normal y caracterizar  $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A \text{ es unitario}\}$ .
7. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Son equivalentes:
- $T$  es unitario.
  - $T^*$  es unitario.
  - $T$  es una isometría suryectiva.
  - $T$  y  $T^*$  son isometrías.
8. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$  normal. Entonces:
- $\|T^2\| = \|T\|^2$
  - $\ker(T) = \ker(T^*)$
  - $T^2 = T \implies T$  es autoadjunto.
  - $T^2 = 0 \implies T = 0$ .
9. Si  $H$  es un espacio de Hilbert, sea  $P \in \mathcal{L}(H)$  un operador no nulo tal que  $P^2 = P$ . Son equivalentes:
- $P^* = P$
  - $P$  es normal
  - $\|P\| = 1$
  - $\ker(P) = R(P)^\perp$
10. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $S, T \in \mathcal{L}(H)$ . Probar que:
- $T^*T$  y  $TT^*$  son positivos.
  - Si  $T$  es positivo,  $S^*TS$  es positivo.
11. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Probar que  $R(T)$  es cerrado si y sólo si  $T$  es acotado inferiormente en  $(\ker(T))^\perp$ .
12. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ .
- Si  $H$  es un espacio sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\langle Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$  entonces  $T = 0$ .
  - Dar un contraejemplo de (a) si  $H$  es Hilbert real.
  - Si  $H$  es un Hilbert real y  $T$  es autoadjunto, entonces vale (a).
  - $T$  es normal si y sólo si  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ .
13. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$  normales.
- Si  $T_n x \rightarrow Tx \quad \forall x \in H$  entonces  $T_n^* x \rightarrow T^* x \quad \forall x \in H$ .
  - Dar un contraejemplo si  $T_n$  no son normales.

14. Sean  $H$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ ,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Son equivalentes:

- a)  $T$  es autoadjunto
- b)  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- c)  $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- d)  $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \quad \forall x \in H$
- e)  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H$

**Definición:** Si  $H$  es un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$  se dice isometría parcial si  $T|_{(\ker T)^\perp}$  es isometría.

15. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ .  $T$  es isometría parcial si y sólo si  $T^*T$  es proyector.

16. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$  positivo. Entonces  $\{x \in H : \langle Tx, x \rangle = 0\}$  es un subespacio de  $H$ .

17. Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$  autoadjunto. Si  $x \in H$  es tal que  $Tx \neq 0$  entonces  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n x \neq 0$ .

**Definición:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable y sea  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $H$ . Diremos que  $T \in \mathcal{L}(H)$  es un operador de Hilbert-Schmidt si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$  converge, y notaremos

$$\|T\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

18. Probar que:

- a)  $\|T\|_2$  no depende de la base elegida.
- b)  $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$  y  $\|T\| \leq \|T\|_2$ .
- c)  $\langle S, T \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n \rangle$ , es un producto interno que define  $\|\cdot\|_2$  y hace de los operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

19. Probar que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y que si  $T$  es de Hilbert-Schmidt y  $S \in \mathcal{L}(H)$ , entonces  $ST$  y  $TS$  son de Hilbert-Schmidt con  $\|ST\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2$  y  $\|TS\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2$ .

- 20. a) Si  $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$  es un operador integral, probar que entonces  $K$  es de Hilbert-Schmidt y calcular  $\|K\|_2$ .
- b) >Bajo qué condición sobre la sucesión  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  el operador  $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$  dado por  $Tx = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Hilbert-Schmidt?
- c) Dar un ejemplo de un operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.