**Análisis Funcional - Primer cuatrimestre de 2009**

**Práctica 4 - Espacios de Hilbert**

1. Probar que son espacios de Hilbert:

   a) $\mathbb{C}^n$, con producto escalar $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$

   b) $\ell^2$, con producto escalar $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$

   c) $L^2(X)$, donde $(X, \sum, \mu)$ es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\;d\mu$$

2. Si $H$ es un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{a(x+y,x+y) - a(x-y,x-y) + i\Big[a(x+iy,x+iy) - a(x-iy,x-iy)\Big]\Big\}$$

   En particular, en $H$ Hilbert, $\forall x, y \in H$:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\Big\}$$

3. a) Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de $E$ (y que hace de $E$ un espacio de Hilbert) si y sólo si $\|\ \|$ verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \forall x, y \in E$$

   b) $(\ell^p, \|\ \|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

4. Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

   a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

   b) Si $x \in H$, $x \perp e_n$ $\forall n$, entonces $x = 0$.

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea $H$ un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de $H$ que genera un subespacio denso en $H$.

   a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido $e_n$,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle\, e_k}{\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle\, e_k\|}$$

   Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de $H$.

*b*) Si $\{f_n\}_n$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, b_i$ entonces $f_n = \alpha_n \, e_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1 \ \ \forall n$.

6. Desigualdad de Bessel: Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

   *a*) $\forall x \in H$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

   *b*) $\forall x \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

7. Sea $H$ un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $H$ entonces $\forall x \in H$ vale:

   *a*) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$

   *b*) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

   *c*) Si $y \in H$, $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. *a*) Probar que $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de $\ell^2$.

   *b*) Probar que $\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

   *c*) Probar que $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x) \}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $L^2[-1, 1]$ considerado como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

9. *a*) El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1, 1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

   $$e_n(x) = \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{1/2} P_n(x)$$

   donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \, (\frac{d}{dx})^n (x^2 - 1)^n$ son los polinomios de Legendre.

   *b*) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

   $$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \, H_n(x) \, e^{-x^2/2}$$

   donde $H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H_n' = 2n \, H_{n-1}$.

10. Sean $H$ y $K$ espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle \ , \ \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

11. Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio.

*a*) Probar que existe $x \in H - S$ tal que $x \perp S$.

*b*) Si $S^{\perp} = \{x \in H : x \perp S\}$ entonces $S^{\perp}$ es un subespacio cerrado y $S \oplus S^{\perp} = H$.

*c*) $(S^{\perp})^{\perp} = S$

*d*) Dar contraejemplos de (b) y (c) si $S$ no es cerrado.

12. *a*) Sean $H$ un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por $D$ es denso en $H$ si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

*b*) En $\ell^2$ sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que $S$ es denso en $\ell^2$.

13. Sean $S$ y $T$ subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert $H$. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Sean $H$ un espacio de Hilbert, $x_n, x \in H$.

*a*) $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$

*b*) Si $\{e_n\}_n$ es una base de $H$ entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$

*c*) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$

*d*) Si $\{e_n\}_n$ es una base de $H$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m \rangle \to \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$

*e*) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una subsucesión $x_{n_k}$ tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \to x$.

15. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert $H$, son equivalentes:

*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.

*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

16. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo en un espacio de Hilbert $H$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en $H$ que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también completo.

# Familias sumables.

Sean $E$ un espacio de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ una familia en $E$.

**Definición:** $\sum_{i\in I} x_i$ *es de Cauchy si y sólo si* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists F \subset I$, *$F$ finito, tal que si $G_1$ y $G_2$ son subconjuntos finitos de $I$ que contienen a $F$ entonces*

$$\Big\| \sum_{i\in G_1} x_i - \sum_{i\in G_2} x_i \Big\| < \varepsilon$$

17. Probar que la siguiente definición es equivalente a la anterior: $\forall\varepsilon > 0$ $\exists F \subset I$, $F$ finito, tal que si $F \subset G \subset I$, $G$ finito, entonces

$$\Big\| \sum_{i\in G-F} x_i \Big\| < \varepsilon$$

**Definición:** $\sum_{i\in I} x_i = x \quad (x \in E)$ *si y sólo si* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists F \subset I$, *$F$ finito, tal que si $F \subset G \subset I$, $G$ finito, entonces*

$$\Big\| \sum_{i\in G} x_i - x \Big\| < \varepsilon$$

*En este caso se dice que la familia es sumable.*

18. En un espacio de Banach $E$, $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy si y sólo si $(x_i)_{i\in I}$ es sumable.

19. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y = \sum_{i\in I} y_i$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$x + y = \sum_{i\in I} (x_i + y_i) \qquad \wedge \qquad \lambda x = \sum_{i\in I} (\lambda x_i)$$

20. Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, $y \in H$, con $H$ Hilbert, entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y\rangle$$

21. Si $\sum_{i\in I} x_i$ es de Cauchy entonces $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

22. $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{C} : \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty\}$, con $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x_i\, \overline{y}_i$, es un espacio de Hilbert. (enunciar y probar Hölder para que el producto escalar esté bien definido)

23. Pitágoras: Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia ortogonal en un espacio de Hilbert $H$. $(x_i)_{i\in I}$ es sumable si y sólo si $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ es sumable y en tal caso

$$\Big\| \sum_{i\in I} x_i \Big\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$$

24. Desigualdad de Bessel: Sea $H$ un espacio de Hilbert. Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia ortonormal en $H$ y $x \in H$ entonces $(|\langle x, x_i\rangle|^2)_{i\in I}$ es una familia sumable y

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

25. Demostrar que todo espacio de Hilbert $H$ admite una base y que dos bases cualesquiera son coordinables.

26. *a*) Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si todo sistema ortonormal es a lo sumo numerable.

    *b*) Si $\#(I) > \aleph_0$, $\ell^2(I)$ no es separable.

27. Sea $H$ un espacio de Hilbert.

    *a*) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de $H$, entonces $\forall x \in H$

    $$x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle\, x_i \quad \wedge \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

    *b*) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una base de $H$, entonces $H$ es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I)$.

    *c*) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

# Otros ejemplos: Espacios de Sobolev

28. Sean $f, g \in L^2(a, b)$, decimos que $f' = g$ en sentido débil si

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)dx \; \forall\, \varphi \in C_0^1[a, b]$$

Definimos el espacio de Sóbolev $H^1[a, b]$

$$H^1(a, b) = \{f \in L^2(a, b) : \; \exists\, g \in L^2(a, b) \text{ tal que } f' = g \text{ en sentido débil } \}$$

*a*) Probar que $H^1(a, b)$ es un espacio de Hilbert si definimos el producto escalar

$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \langle f', g'\rangle_{L^2}$$

*b*) Probar que si $f' = 0$ en sentido débil, entonces $f$ es constante en casi todo punto.

*c*) Probar que si $f \in H^1(a, b)$ y $F(x) = \int_a^x f'(x)$ entonces $f - F(x)$ es constante en casi todo punto.

*d*) Concluir $H^1(a,b)$ puede identificarse con el conjunto de las funciones $f$ que son absolutamente continuas en $[a,b]$ tales que $f'(x)$ (que existe en casi todo punto) está en $L^2[a,b]$.

*e*) Si $f \in H^1(a,b)$ y $x, y \in (a,b)$ entonces:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{1/2} \left( \int_x^y |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

29. De manera similar definimos el espacio de Sobolev $H^k[a,b]$ como el conjunto de aquellas funciones de $L^2(a,b)$ tales que $f^{(j)} \in L^2$ para $0 \leq j \leq k$. Probar que el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{k} \langle f^{(j)}, g^{(j)} \rangle$$

hace de $H^k(a,b)$ un espacio de Hilbert.

30. Sea $H^k_{per}(0, 2\pi)$ el subespacio de las funciones de $H^k(a,b)$ tales que $f$ y sus derivadas hasta el orden $k$ son $2\pi$ períodicas:

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) \; \forall \; j \; 0 \leq j < k$$

*a*) Probar que $f \in H^k_{per}(a,b)$ si y sólo si sus coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ verifican que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

(Sugerencia: ¿ Qué relación existe entre los coeficientes de Fourier de $f$ y los de $f'$ ?)

*b*) ¿ Cómo se podria definir $H^s(0, 2\pi)$ para $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ?

# Convergencia puntual de Series de Fourier

31. La *serie de Fourier* de una función integrable $f(x)$ definida en $(0, 2\pi)$ es la serie

$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \qquad \text{donde } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} \, dy.$$

Sea $s_n(f)(x) = \sum_{m=-n}^{n} a_m e^{imx}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ $(0 < x < 2\pi)$.

*a*) Probar que

$$s_n(f)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y+x) D_n(x) \, dx,$$

donde $D_n$ es el núcleo de Dirichlet dado por:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

*b*) Probar que si $f$ verifica la condición de Dini en el punto $x_0$:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0+t)-f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

para algún $\delta > 0$, entonces $s_n(f)(x_0) \to f(x_0)$.
Sugerencia: utilizar el siguiente Lema de Riemann-Lebesgue: si $f \in L^1[0, 2\pi]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{x})\mathrm{dx} \to \text{ cuando } |\omega| \to \infty$$

32. Sea $X = \{f \in C([0, 2\pi])|\ f(0) = f(2\pi)\}$.

*a*) Probar que $X$ es un espacio de Banach.

*b*) Probar que el funcional lineal $T_n : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x)\, dx$$

es acotado y

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)|\, dx.$$

*c*) Probar que $\|T_n\| \to \infty$. (Sugerencia: $|\sin \frac{1}{2}x| \leq \frac{1}{2}x$)

33. Probar que existe una función continua $f(x)$ en $0 \leq x \leq 2\pi$, con $f(0) = f(2\pi)$, tal que su serie de Fourier diverge en $x = 0$.

Sugerencia: Usar el problema anterior y el Teorema de Banach-Steinhaus.