Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2009

Práctica 2

Funcionales lineales - Teorema de Hahn-Banach

1. Si E un espacio vectorial, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal, $\varphi \not\equiv 0$, entonces $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{C}$.

2. *a*) Sean $(E, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$, según sea el cuerpo de escalares de E) una forma lineal. Son equivalentes:
   1) φ es continua
   2) φ es continua en 0
   3) φ es acotada (i.e. $\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$)

   b) φ es continua si y sólo si $\ker \varphi$ es cerrado.

3. Sean E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal.

   a) Si φ es no acotada entonces toma todos los valores reales en cualquier entorno de 0.

   b) Si φ no es acotada entonces $ker\ \varphi$ es denso.

   c) φ es continua si y sólo si $\forall c \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x : \varphi(x) < c\}$ y $\{x : \varphi(x) > c\}$ son abiertos.

   d) Si $A \subset E$ tiene interior no vacío y $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq a\ \forall x \in A$, entonces φ es continua.

4. Sea E un espacio vectorial normado, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal tal que para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a 0, resulta $(\varphi(x_n))_n$ acotada. Demostrar que φ es continua.

5. Sea $E^* = \{\varphi : E \to \mathbb{C}\ /\varphi$ es lineal y continua $\}$.

   a) Entonces
   $$\|\varphi\|_{E^*} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$$
   es una norma sobre E^*, que hace de E^* un espacio de Banach.

   b) Prabar las siguientes igualdades:
   $$\begin{aligned} \|\varphi\|_{E^*} &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E,\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\} \end{aligned}$$
   y $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\,\|x\|$.

6. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

   a) $\varphi : c \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

   b) $\varphi : L^2[-1,1] \to \mathbb{C},\ \ \varphi(f) = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$

   c) $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{C},\ \ \varphi(f) = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$

   d) $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = x_1 + x_2$

   e) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C},\ \ \varphi(x) = x_1 + x_2$

f) $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{C}, \;\; \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

g) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C}, \;\; \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

h) $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}, \;\; \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

7. Sean E un espacio de Banach, $\varphi \in E^*$, $\varphi \not\equiv 0$, $y \in E$, $y \notin \ker\varphi$. Probar que:

   a) $E = \ker\varphi \oplus \langle y \rangle$, donde $\langle y \rangle$ significa el subespacio generado por y.

   b) $d(y, \ker\varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$

   c) Si $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$ entonces $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$.

8. *a*) Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.

   b) Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $f(t) = 0 \;\forall t \notin [a, b]$. Demostrar que $(C_0(\mathbb{R}), \| \;\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado. Además, si definimos $\varphi : C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int f(t)\, dt$ probar que φ resulta una funcional lineal no acotada.

9. Sea en c_0 la familia $\{e^n\}_{n \geq 1}$ de sucesiones definidas por $e_i^n = \delta_{ni}$ y sea x^0 la sucesión dada por $x_i^0 = \frac{1}{i}$

   a) Verificar que $A = \{x^0, e^1, e^2, \ldots, e^n, \ldots\}$ es un conjunto l.i. de c_0

   b) Sea B una base algebraica de c_0 que contenga a A. Llamemos $\{b^j\}_{j \in J}$ al conjunto $B \setminus A$.

   Luego todo $x \in c_0$ se escribe de manera única como

   $$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_j b^j$$

   donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

   Si $f : c_0 \to \mathbb{C}$ se define por $f(x) = \alpha_0$, probar que f es una funcional lineal no continua.

10. Probar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe un funcional lineal no continuo.

11. Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi, \psi \in E^*$ tales que $\varphi.\psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.

12. *a*) Sea $y \in \ell^1$. Si definimos $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ por

    $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, y_n$$

    resulta $\varphi \in {c_0}^*$ con $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$.

b) Recíprocamente, dada $\varphi \in c_0^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n = \varphi(e_n)$, donde $e_n = (\delta_k^n)_{k\geq 1}$ pertenece a ℓ^1.

c) Probar que las aplicaciones definidas en (i) y (ii) son una la inversa de la otra, y deducir que $c_0^* \cong \ell^1$ (isomorfismo isométrico).

d) De manera análoga, probar que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ y que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

13. *a*) Caracterizar el dual de c.

    b) Sea $\varphi : c \to \mathbb{C}$ la funcional $\varphi(x) = \text{lím}_{n\to\infty} x_n$ y sea $\tilde{\varphi} : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ una extensión dada por el teorema de Hanh-Banach. Probar que $\tilde{\varphi}$ no puede representarse en la forma:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \; y \in \ell^1$$

14. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado.

    a) Si S tiene dimensión finita, probar que S es complementado.

    b) idem (a) si S tiene codimensión finita.

15. *a*) Sea E un espacio vectorial normado, entonces $\forall x \in E$

$$\|x\| = \text{máx}\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \; \|\varphi\| = 1\}$$

    b) Sea E un espacio vectorial normado, sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$ $\forall \varphi \in E^*$, entonces $x = y$.

16. Sean E un espacio vectorial normado y $S \subset E$ un subespacio.

    a) Si $x \in E$ y $d = d(x, S) > 0$ entonces $\exists \varphi \in E^*$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x) = d(x, E)$, $\varphi(y) = 0$ $\forall y \in S$.
    (Sug: Sea $H = \langle S, x\rangle$, definir $\psi : S \to \mathbb{C}$ por $\psi(\lambda x + y) = \lambda d$, $\forall y \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$)

    b) Probar que

$$\overline{S} = \cap\{\ker(\phi)/\phi \in E^* \; S \subset \ker(\phi)\}.$$

    En particular, si S no es denso en E entonces existe $\phi \in E^*$, $\phi \neq 0$ tal que $\phi\,|_S \equiv 0$.

17. Sea E un espacio vectorial normado, $(x_n)_n \subset E$. Un punto y_0 es límite de combinaciones lineales $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j\, x_j$ si y sólo si $\forall \varphi \in E^*$ que verifique que $\varphi(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.

18. Sean E, F espacios normados.Probar que $E\times F$ es un espacio normado, con $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$. Probar que $(E \times F)_p$ es isomorfo a $(E \times F)_q$ si $1 \leq p, q \leq \infty$.

19. Sean E y F espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre $(E \times F)^*$ y $E^* \times F^*$.

20. Sea E un Banach y S un subespacio de E, probar que

$$\overline{S} = \cap\{\ker(\phi)/\phi \in E^* \; S \subset \ker(\phi)\}.$$