

## ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Primer cuatrimestre de 2009

### Autovalores y autovectores - Diagonalización

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ):

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \quad \text{v) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vi) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.** Para cada una de las matrices  $A$  del ejercicio anterior, sea  $U$  una base de  $K^n$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  la transformación lineal tal que  $|f|_U = A$ . Decidir si es posible encontrar una base  $B$  de  $K^n$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal. En caso afirmativo, calcular  $C(B, U)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de  $\delta$  y exhibir un autovector correspondiente.

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal.

ii) Calcular  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

iii) Hallar, si es posible, una matriz  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 5.**

i) Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ . Determinar todos los  $a, b$  y  $c \in K$  para los que  $A$  es diagonalizable.

ii) Probar que toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 6.** Diagonalizar las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 7.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

- i) Probar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$  donde  $F_i$  es el  $i$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  y  $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ ).
- ii) Encontrar una matriz  $P \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $P.A.P^{-1}$  sea diagonal.
- iii) Hallar la fórmula general para el término  $F_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .
- iv) Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6.a_{n+2} - 11.a_{n+1} + 6.a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 8.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = -1$ .

Sugerencia: Hallar una matriz  $C \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$  sea diagonal y hacer el cambio

de variables  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

**Ejercicio 10.** Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

- i)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible  $\Leftrightarrow 0$  no es autovalor de  $A$ .
- ii)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible,  $x$  autovector de  $A \Rightarrow x$  autovector de  $A^{-1}$ .
- iii)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $n$  impar  $\Rightarrow A$  admite un autovalor real.

**Ejercicio 11.** Se sabe que la matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tiene a  $(1, -1)$  como autovector de autovalor  $\sqrt{2}$  y, además,  $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$ . Decidir si  $A$  es diagonalizable en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . ¿Es  $A$  única?

**Ejercicio 12.**

- i) Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  diagonalizable con  $\text{tr}(A) = -4$ . Calcular los autovalores de  $A$ , sabiendo que los autovalores de  $A^2 + 2A$  son  $-1, 3$  y  $8$ .
- ii) Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  tal que  $\det(A) = 6$ ;  $1$  y  $-2$  son autovalores de  $A$  y  $-4$  es autovalor de la matriz  $A - 3I_4$ . Hallar los restantes autovalores de  $A$ .

**Ejercicio 13.**

- i) Sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un proyector con  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Calcular  $\mathcal{X}_f$ . ¿Es  $f$  diagonalizable?
- ii) Sea  $K$  un cuerpo incluido en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un morfismo nilpotente. Calcular  $\mathcal{X}_f$ . ¿Es  $f$  diagonalizable?

**Ejercicio 14.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que verifica  $A^2 + I_n = 0$ . Probar que  $A$  es inversible, que no tiene autovalores reales y que  $n$  debe ser par.

**Ejercicio 15.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ . Probar que  $f$  es diagonalizable si y sólo si  $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una transformación lineal. Probar que existe una base  $B$  de  $\mathbb{C}^n$  tal que  $|f|_B$  es triangular superior.

**Ejercicio 17.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  las raíces de  $\mathcal{X}_A$  contadas con multiplicidad.

i) Probar que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

ii) Probar que  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

**Ejercicio 18.** Sean  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{n \times m}$ .

i) Probar que las matrices de  $K^{(m+n) \times (m+n)}$   $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$  son semejantes.

ii) Deducir que, si  $n = m$ ,  $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$ .

**Ejercicio 19.** Dadas las matrices  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  y los polinomios  $P \in \mathbb{C}[X]$ , calcular  $P(A)$  para:

i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , a)  $P = X - 1$ , b)  $P = X^2 - 1$ , c)  $P = (X - 1)^2$

ii)  $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ,  $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

**Ejercicio 20.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que el minimal de  $A$  como matriz real y el minimal de  $A$  como matriz compleja coinciden.

**Ejercicio 21.** Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

v)  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$     vi)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     vii)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$     viii)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ix)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$     x)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$     xi)  $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

xii)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$     xiii)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$     xiv)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$     xv)  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

**Ejercicio 22.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

**Ejercicio 23.** Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i)  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(P) = P' + 2.P$

ii)  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f(A) = A^t$

**Ejercicio 24.** Sea  $\delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  la transformación lineal derivada. Probar que  $\delta$  no admite ningún polinomio minimal.

**Ejercicio 25.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular  $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$  para  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

ii) Calcular  $A^{1000}$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

iii) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , expresar a  $A^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

iv) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , expresar a  $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A + 37.I_2)^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

v) Calcular  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

vi) Calcular  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 26.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $f$  es un isomorfismo si y sólo si el término constante de  $\mathcal{X}_f$  es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de  $f^{-1}$  como polinomio en  $f$ .

**Ejercicio 27.** Exhibir una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $A^2 + I_n = 0$ . Comparar con el ejercicio 13.

**Ejercicio 28.**

i) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por  $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$ . Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f$ -invariantes.

ii) Sea  $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotación de ángulo  $\theta$ . Probar que, para todo  $\theta \neq k.\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $f_\theta$  no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f_\theta$ -invariantes.

iii) Sea  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la transformación  $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¿Es  $g_\theta$  diagonalizable? Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{C}^2$  que sean  $g_\theta$ -invariantes.

**Ejercicio 29.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal nilpotente tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ .

i) Probar que para cada  $0 \leq i \leq n$  existe un subespacio  $S_i$  de  $\mathbb{R}^n$  que es  $f$ -invariante.

ii) Probar que existe un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que es  $f$ -invariante pero que no admite un complemento  $f$ -invariante.

**Ejercicio 30.**

- i) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal diagonalizable. Si  $S$  es un subespacio de  $V$   $f$ -invariante, probar que  $f : S \rightarrow S$  es diagonalizable.
- ii) Sean  $A, B \in K^{n \times n}$  tales que  $A.B = B.A$  y sea  $E_\lambda = \{x \in K^n / A.x = \lambda.x\}$ . Probar que  $E_\lambda$  es  $B$ -invariante.
- iii) Sean  $A, B \in K^{n \times n}$  dos matrices diagonalizables tales que  $A.B = B.A$ . Probar que existe  $C \in GL(n, K)$  tal que  $C.A.C^{-1}$  y  $C.B.C^{-1}$  son diagonales. (Es decir,  $A$  y  $B$  se pueden diagonalizar simultáneamente.)

**Ejercicio 31.**

- i) Hallar una matriz  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  tal que  $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$ . Decidir si  $A$  es diagonalizable.
- ii) Hallar una matriz  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  tal que  $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$ . Decidir si  $A$  es diagonalizable.

**Ejercicio 32.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ .

- i) Probar que si  $A$  es nilpotente, entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $m_A(X) = X^k$ . Calcular todos los autovalores de  $A$ .
- ii) Si  $K = \mathbb{C}$  y el único autovalor de  $A$  es el 0, probar que  $A$  es nilpotente. ¿Qué pasa si  $K = \mathbb{R}$ ?

**Ejercicio 33.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz de traza nula. Probar que  $A$  es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.