

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°3 - Primer cuatrimestre de 2009**Transformaciones lineales**

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

- i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$
- ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$
- iii) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = i.z$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial)
- iv) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial)
- v) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- vi) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- vii) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- i) $f(x, y) = (x, 0)$
- ii) $f(x, y) = (x, -y)$
- iii) $f(x, y) = (\frac{1}{2} \cdot (x + y), \frac{1}{2} \cdot (x + y))$
- iv) $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \sen t, x \cdot \sen t + y \cdot \cos t)$

Ejercicio 3.

- i) Encontrar una función $f : V \rightarrow V$ (para un K -espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v, w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
- ii) Encontrar una función $f : V \rightarrow V$ (para un K -espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k.v) = k.f(v)$ para cualquier escalar $k \in K$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

Ejercicio 4. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

- i) $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$
- ii) $t : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$, $t(A) = A^t$
- iii) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$
- iv) $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$
- v) $s : K^\mathbb{N} \rightarrow K^\mathbb{N}$, $s(\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

Ejercicio 5.

- i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.
- ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

iii) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si $f = g$.

iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

v) Hallar una fórmula para todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfacen $f(X^2 + X - 1) = (1, 2)$, $f(2X + 3) = (-1, 1)$ y $f(X^2 - X - 4) = (2, 1)$.

Ejercicio 6.

- Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada transformación lineal del Ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .
- Clasificar las transformaciones lineales del Ejercicio 4 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 8. Sean $g : V \rightarrow V'$ y $f : V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales. Probar:

- $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$.
- Si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$.
- $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$.
- Si $\text{Im}(g) = V'$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$.

Ejercicio 9.

i) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

ii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

iii) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

iv) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \text{Im}(f)$?

Ejercicio 10. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

i) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$

ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, -x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

- i) $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- ii) $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
- iii) $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
- iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
- v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
- vi) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 12. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:

- i) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- ii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- iii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

Ejercicio 13. Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que $g = id_V - f$ es un proyector con $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$ y $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$.

Ejercicio 14. Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es *nilpotente* si $\exists s \in \mathbb{N} / f^s = 0$.

- i) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
- ii) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff f^n = 0$.
(Sugerencia: considerar si las inclusiones $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).
- iii) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define la transformación lineal $f : V \rightarrow V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

- iv) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i , $2 \leq i \leq n$, construir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nilpotente tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

Ejercicio 15. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.
- ii) Hallar ecuaciones para S (usar i)).
- iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + (0, 1, 1, 2)$.

Ejercicio 16.

- i) Sea $S \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \rightarrow K^n$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.
- ii) Sea $T \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \rightarrow K^n$ y un vector $y \in K^n$ tales que $T = f^{-1}(y)$.

Ejercicio 17. Sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sean B, B' bases de V . Calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
 $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$
- ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ es la base canónica de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial.
- iii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- iv) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$
- v) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$
- vi) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B' = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$
- vii) V, f y $B = B'$ como en el Ejercicio 14, iii)

Ejercicio 18. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar $f(3.v_1 + 2.v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?
- ii) Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
- iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$.

Ejercicio 19. Sea V un K -espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V . Sea $f : V \rightarrow V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar $|f^{-1}|_B$ y calcular $f^{-1}(v_1 - 2.v_2 + v_4)$.

Ejercicio 20. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para un n adecuado que verifique:

- i) $A \neq I_n$ y $A^3 = I_n$
- ii) $A \neq 0$, $A \neq I_n$ y $A^2 = A$

Ejercicio 21. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V .

- i) Sea $tr : \text{Hom}(V, V) \rightarrow K$ la aplicación definida por $tr(f) = tr(|f|_B)$. Probar que $tr(f)$ no depende de la base B elegida.
 $tr(f)$ se llama la *traza* del endomorfismo f .
- ii) Probar que $tr : \text{Hom}(V, V) \rightarrow K$ es una transformación lineal.

Ejercicio 22. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2.v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 , y sea E la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar U' .

Ejercicio 23.

i) Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Probar que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de \mathbb{R}^4 . Calcular $|f|_B$.

ii) Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $v_1 \notin \text{Nu}(f^{n-1})$).

Ejercicio 24. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 25. Sean V y W K -espacios vectoriales, $\dim V = n$ y $\dim W = m$, y $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Probar que existen una base B de V y una base B' de W tal que

$$(|f|_{BB'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j ; i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 26. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3)$$

i) Determinar bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices $C, D \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 27. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 29. Sean $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A | b)$ su matriz ampliada. Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A | b)$.

Ejercicio 30. Sea $A \in K^{m \times n}$, $\text{rg}(A) = s$ y sea $T = \{X \in K^{n \times r} / A.X = 0\}$. Calcular $\dim T$.

Ejercicio 31. Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times r}$. Probar que $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(B)$.

Ejercicio 32. Sean $A, D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinar C_1, C_2, C_3 y $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C_1.A.C_2 = C_3.D.C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Determinar $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B, B', B_1 y B'_1 de \mathbb{R}^3 tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1B'_1} = D$.

Ejercicio 33. Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decidir si existen matrices $P, Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A = P.B.Q$.

$$\text{i) } n = 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } n = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 34. Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Se dice que A es *semejante* a B (y se nota $A \sim B$) si existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.B.C^{-1}$.

i) Demostrar que \sim es una relación de equivalencia en $K^{n \times n}$.

ii) Probar que dos matrices semejantes son equivalentes. ¿Vale la recíproca?

iii) Sean $A, A' \in K^{n \times n}$. Probar que $A \sim A' \iff \exists f : K^n \rightarrow K^n$ transformación lineal y bases B y B' de K^n tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$.

Ejercicio 35.

i) Sean $A, A' \in K^{n \times n}$ tales que $A \sim A'$. Probar que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A')$.

$$\text{ii) Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

¿Existen $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$?