

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Primer cuatrimestre de 2009**Espacios Vectoriales**

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = 2 \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = 0 \end{cases} \\ \\ \text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = 6 \end{cases} & \text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 1 \end{cases} \end{array}$$

Ejercicio 2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

i) Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos k , resolverlos.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} kx_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + kx_2 & = 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 & = 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 & = 0 \end{cases} \end{array}$$

ii) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = b \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema en \mathbb{C}^3 :

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver el siguiente sistema en \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $(1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre K .

i) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) / a_i \in K \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K (donde K es un cuerpo cualquiera).

$$\begin{aligned} + & : (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}} \\ \cdot & : k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

ii) X es un conjunto, $V = \mathcal{P}(X)$, $K = \mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} + & : B + C = B \Delta C \\ \cdot & : 0 \cdot B = \emptyset, \quad 1 \cdot B = B \end{aligned}$$

iii) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \oplus & : a \oplus b = a \cdot b \\ \otimes & : \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

Ejercicio 9. Sea V un espacio vectorial sobre K , $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad k \cdot \vec{0} &= \vec{0} & \text{iii)} \quad k \cdot v = \vec{0} &\Rightarrow k = 0 \text{ ó } v = \vec{0} \\ \text{ii)} \quad -(-v) &= v & \text{iv)} \quad -\vec{0} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ejercicio 10.

i) Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo. Se define la función $f_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

Interpretar geoméricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la *traslación en v*).

ii) Probar que \mathbb{R}^2 es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= r \cdot (x - 2, y - 1) + (2, 1) \end{aligned}$$

(Este espacio se notará $\mathbb{R}_{(2,1)}^2$ para distinguirlo de \mathbb{R}^2 con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

iii) Interpretar geoméricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= f_{(2,1)}(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y)) \end{aligned}$$

Ejercicio 11.

- i) Encontrar un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.
- ii) Encontrar un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 12. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K -espacio vectorial:

- i) $S_3 = \{a.i / a \in \mathbb{R}\}$ $V = \mathbb{C}$ $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$
- ii) $S_4 = \{f \in K[X] / f'(1) = 0\}$ $V = K[X]$
- iii) $S_7 = \{M \in K^{n \times n} / M^t = -M\}$ $V = K^{n \times n}$
- iv) $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f'' + 3f' = 0\}$ $V = C^\infty(\mathbb{R})$ $K = \mathbb{R}$
- v) $S_9 = \{v \in \mathbb{R}_{(2,1)}^2 / x + y = 3\}$ $V = \mathbb{R}_{(2,1)}^2$ $K = \mathbb{R}$
- vi) $S_{11} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0 \forall r \geq k\}$ $V = K^\mathbb{N}$
- vii) $S_{12} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} / a_1.a_2 = 0\}$ $V = K^\mathbb{N}$

Ejercicio 13. Sean S y T subespacios de un K -espacio vectorial V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 14. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K -espacios vectoriales:

- i) $K^{n \times n}$
- ii) \mathbb{C}^n , $K = \mathbb{R}$
- iii) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, $K = \mathbb{Z}_2$
- iv) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$, $K = \mathbb{R}$
- v) $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 / x + 2y + z = 0\}$, $K = \mathbb{Z}_7$
- vi) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} / A = -A^t\}$, $K = \mathbb{Q}$
- vii) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] / f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$, $K = \mathbb{R}$
- viii) $S_5 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} / a_i = 0 \forall i \geq 5 ; a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 ; a_2 + a_4 = 0\}$, $K = \mathbb{R}$
- ix) $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / f''' = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

Ejercicio 15. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- i) Sea V un K -espacio vectorial y sean $v, w \in V, k \in K$. Entonces $\langle v, w \rangle = \langle v, w + k.v \rangle$.
- ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle$. Entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.

Ejercicio 16. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.
- iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 17. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V en cada uno de los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
- ii) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$ $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$
- iii) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$ $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
- iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$ $T = \{f \in \mathbb{R}[X] / f'(1) = f''(1) = 0\}$

Ejercicio 18. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K .

- i) $(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1$ en $K[X]$
- ii) $(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)$ en \mathbb{Q}^4
- iii) $(1 - i, i), (2, -1 + i)$ en \mathbb{C}^2 , para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
- iv) $f(x) = e^x, g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- v) $f(x) = \operatorname{sen}(x), g(x) = \operatorname{cos}(x), h(x) = x \operatorname{cos}(x)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- vi) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 19. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

- i) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- ii) $\{k \cdot X^2 + X, X^2 - k, k^2 \cdot X\} \subset \mathbb{R}[X]$
- iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ejercicio 20. Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independientes sobre \mathbb{C} .

Ejercicio 21. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K -espacio vectorial V indicado.

- i) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$
- ii) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$
- iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

Ejercicio 22. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S .

i) $S = \langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

ii) $S = \langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

Ejercicio 23. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K -espacios vectoriales:

i) $\mathbb{C}, K = \mathbb{R} \text{ y } K = \mathbb{C}$

ii) $\{f \in \mathbb{Q}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3 \text{ y } (x^2 - 2) \mid f\}, K = \mathbb{Q}$

iii) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} / a_i = a_j \forall i, j\}$

Ejercicio 24. Hallar la dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

i) $S = \langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = 0\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & k-6 & 5k \\ 1 & k-2 & k^2+4k \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Ejercicio 25. Sean S y T los subespacios de \mathbb{R}^4

$$S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle \quad \text{y} \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio U de \mathbb{R}^4 tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 26. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

i) $\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$.

ii) $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$.

Ejercicio 27. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S + T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 1, 1) \rangle, T = \langle (2, -1, 1), (3, 0, 2) \rangle$

ii) $V = \mathbb{R}[X], S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq 3\}, T = \{f \in \mathbb{R}[X] / \text{mult}(4, f) \geq 4\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}, S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / A_{11} + A_{21} = 0, 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\},$

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 28. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3, \dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^{11}, \dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 29. Sea V un K -espacio vectorial y sean S, T y U subespacios de V .

- i) Probar que $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$.
- ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.
- iii) Probar que, si $U \subseteq S$, entonces vale la igualdad en i).

Ejercicio 30. Sean S, T y U subespacios de un K -espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U, \quad S + T = S + U \quad \text{y} \quad T \subseteq U.$$

Probar que $T = U$.

Ejercicio 31. Para cada S dado hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso T se dice un *complemento* de S con respecto a V).

- i) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
- ii) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$
- iii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / \text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

Ejercicio 32. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$).

- i) Probar que $\forall v \notin T$, $T \oplus \langle v \rangle = V$.
- ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
- iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 33. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- i) Sean $S = \{f \in V / f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V / f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ (S es el conjunto de funciones pares y T el conjunto de funciones impares). Probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.
- ii) Sean $U = \{f \in V / f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V / f \text{ es constante}\}$. Probar que U y W son subespacios de V y que $U \oplus W = V$.

(*) Ejercicio 34.

- i) Sea $S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \forall n \in \mathbb{N}\}$. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular su dimensión.
- ii) Encontrar una base de S formada por sucesiones $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que, $\forall n \in \mathbb{N}$, verifiquen $u_n = u^{n-1}$ para algún $u \in \mathbb{R}$.
- iii) Usando ii), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$