1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL

28/10/2009

1. *a*) Dado $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, se define el *conjugado de* P como $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k X^k$. Probar que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P si y solo si $\bar{z} \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{P}$.

   b) Probar que si $P \in \mathbb{R}[X]$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P, entonces $\bar{z}$ es raíz de P con la misma multiplicidad.

2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ coprimos. Probar que:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > ab$, existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $n = ra + sb$.

   b) No existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $ab = ra + sb$.

3. Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función definida recursivamente por:

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + n^2 \quad \text{y} \quad T(1) = 1.$$

   Probar que $T(n) \leq 2n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $a \in \mathbb{R}$, $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el único entero tal que $[a] \leq a < [a] + 1$.

4. Probar la siguiente versión del Teorema Chino del Resto: Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ coprimos, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, el sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

   tiene una única solución $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x_0 < m_1 m_2$.

5. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decidir si es verdadera o falsa. Justificar.

   a) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ son tales que $a \nmid b$ y $a \nmid c$, entonces $a \nmid b + c$.

   b) Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Entonces para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : n) = 1$, vale $a^{2n-1} \equiv a^n \pmod{n}$.

   c) Si $n = p_1 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ primos distintos, la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad es -1.

Justificar debidamente todas las respuestas