1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL
29/09/2009

1. Probar que si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $a \in \mathbb{Z}$ no es múltiplo de p, entonces
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Sean X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Para cada $x \in X$, notemos $C_x = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$. Probar que $C_x \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y que para todo par $x_1, x_2 \in X$, vale que $C_{x_1} = C_{x_2}$ ó $C_{x_1} \cap C_{x_2} = \emptyset$.

3. Probar que:

   a) Para todos $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$,
   $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}.$$

   b) Para todos $k, n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $k \leq n + m$,
   $$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=\max(0,m-k)}^{\min(k,n)} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}.$$

4. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el polinomio $\frac{X^n-1}{X-1}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

   b) Si $n = p_1p_2p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ primos distintos, el producto de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad es -1.

   c) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz triple de un polinomio $f \in \mathbb{C}[X]$, el resto de dividir a f' por $(X-\alpha)^3$ tiene grado 2.

5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Probar que si $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Z}$, $(a : b) = 1$ y $(c : d) = 1$, entonces $|b| = |d|$.

Justificar debidamente todas las respuestas