1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL

14/08/2009

1. Probar que dados $a, b \in \mathbb{N}$, existen únicos $q, r \in \mathbb{N}_0$ tales que $a = q \cdot b + r$ y $0 \leq r < b$.

2. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Si $f \in \mathbb{Q}[X]$ no tiene raíces reales, entonces f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

   b) Si $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$, $f \mid g\,h$ y $(f : g) = 1$, entonces $f \mid h$.

   c) Si $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$, $f \mid h$ y $g \mid h$, entonces $fg \mid h$.

3. Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ se define $a_{n,m} \in \mathbb{N}$ como sigue:

   - $a_{0,m} = 2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.
   - para $n \in \mathbb{N}_0$, $a_{n+1,m} = a_{n,m} + a_{n,m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

   Hallar una fórmula para $a_{n,m}$ en función de $n, m \in \mathbb{N}_0$ y probarla por inducción.

4. *a*) Sea A un conjunto de n elementos. ¿Cuántas relaciones $\mathcal{R} \subset A \times A$ hay que sean simétricas? ¿Cuántas que sean a la vez reflexivas y antisimétricas?

   b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Cuántas funciones $f : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots, m\}$ hay que sean crecientes? ¿Cuántas que sean estrictamente crecientes?

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ par y sean $w, z \in G_n$ primitivas. Probar que $(w + z)^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{R}$.

Justificar debidamente todas las respuestas