Álgebra 1

Primer Cuatrimestre 2009

Práctica 7 - Polinomios

1. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X-3)^{133}$

ii) $f = (X-1)^4(X+5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$

iii) $f = X^{10}(X^5+4)^7$

2. Calcular el grado y el coeficiente principal de f en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$

ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$

iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$

iii) $(X+1)f^2 = X^3 + Xf$

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}\,(f).X^2 f$

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \quad g = X^2 + 2$

ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X^3 + 1$

iii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X + 1$

iv) $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1, \quad g = 3X + 2$

v) $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g = X^5 + 4X - 1$

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$

iii) el resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$

6. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $h \in \mathbb{K}[X]$. Probar que si $f, g, p, q \in \mathbb{K}[X]$ entonces

i) $f \equiv f \ (h)$

ii) si $f \equiv g \ (h)$ entonces $g \equiv f \ (h)$

iii) si $f \equiv g \ (h)$ y $g \equiv p \ (h)$ entonces $f \equiv p \ (h)$

iv) si $f \equiv g \ (h)$ y $p \equiv q \ (h)$ entonces $f + p \equiv g + q \ (h)$ y $f \cdot p \equiv g \cdot q \ (h)$

v) si $f \equiv g \ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n \ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

vi) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \ (h)$ y $r = 0$ ó $\mathrm{gr}\,(r) < \mathrm{gr}\,(h)$

7. Hallar el resto de la división de f por h en los casos

i) $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2$

ii) $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, \quad h = X^{17} + 5$
iii) $f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, \quad h = X^6 + 1$
iv) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$

8. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $a \in \mathbb{K}$. Probar que

i) $X - a \mid X^n - a^n$
ii) si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$
iii) si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$

9. i) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \ (m)$ entonces $f(a) \equiv f(b) \ (m)$
ii) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$

10. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que

i) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$
ii) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$

11. i) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$
ii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado 3 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$
iii) Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 4 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

12. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$

13. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$

i) usando congruencias
ii) evaluando en puntos convenientes

14. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$
ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$
iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$

15. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$
ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$

16. i) Hallar todas las raíces racionales de
(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$
(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$
(c) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$
ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales

17. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$

18. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$. Probar que

$$f = \sum_{k=0}^{n} b_k \Bigg(\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \Bigg)$$

es el único polinomio en $\mathbb{C}[X]$ que es nulo o de grado menor o igual que n y que satisface $f(a_k) = b_k$ para todo $0 \leq k \leq n$

19. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que

i) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$

ii) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$

20. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1, \qquad f_{n+1} = X f_n^2 + X^2 f_n' \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $\operatorname{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

21. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2$

22. Sea $n \in \mathbb{N}$. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $(X - 1)^{n+1} f' = f^2$

23. i) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$ tiene todas sus raíces simples

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple

24. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $X^6 - 2X^5 + (1 + a)X^4 - 2aX^3 + (1 + a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X - 1)^3$

25. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz doble de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$

26. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ tiene todas sus raíces simples

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples

27. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por
$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \qquad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f_n') \quad (n \in \mathbb{N})$$
Probar que i es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$

28. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz múltiple de f si y sólo si es raíz de $(f : f')$. Deducir que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples

29. Factorizar el polinomio f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ en los casos

i) $f = X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$
ii) $f = X^4 - 6X^2 + 1$
iii) $f = X^6 - 2$
iv) $f = X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$, sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz de f
v) $f = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$, sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz de f

30. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$ tenga a a como raíz doble. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

31. Factorizar el polinomio $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f

32. Factorizar el polinomio $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura

33. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de
$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$
sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

34. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

i) Hallar

(a) $a + b + c$	(d) $a^2 + b^2 + c^2$	(g) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$
(b) $ab + ac + bc$	(e) $a^3 + b^3 + c^3$	(h) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
(c) abc	(f) $a^4 + b^4 + c^4$	(i) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$

35. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

36. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6

37. Sea $n \in \mathbb{N}$. Usando que $w \in G_n$ si y solo si w es raíz del polinomio $X^n - 1$, dar una nueva demostración de que la suma de las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 es -1. Calcular $\prod_{w\in G_n} w$.

38. Sea f un polinomio de grado n con raíces distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Probar que el coeficiente de grado $n - 1$ de f es 0 si y solo si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. ¿Qué se puede decir si hay raíces repetidas?

39. Sea $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Si todas las raíces de f son enteros pares, probar que $2^j \mid a_{n-j}\ \forall j = 0, \ldots, n$.