

Álgebra 1

Primer Cuatrimestre 2009

Práctica 6 - Complejos

1. Hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ y $\operatorname{Im}(i \cdot z)$ en cada uno de los siguientes casos

- | | |
|---|--|
| i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$ | iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$ |
| ii) $z = 5i(1 + i)^4$ | v) $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{179}$ |
| iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(1 - 3i)$ | vi) $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}[1 + (2 - i)^2]$ |

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano los siguientes números complejos

- | | | | | |
|---------|--------------|---------------|----------------------|--------------|
| i) z | iii) $z + w$ | v) $-z$ | vii) $2z$ | ix) $ z $ |
| ii) w | iv) $z - w$ | vi) \bar{z} | viii) $\frac{1}{2}w$ | x) $ w - z $ |

3. Graficar en el plano complejo

- $\{z \in \mathbb{C} / 3 \operatorname{Re}(z) - 1 = 2 \operatorname{Im}(z)\}$
- $\{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$
- $\{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z - 1 + i| \leq 3\}$
- $\{z \in \mathbb{C} / z \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot (1 - i) = |z|^2\}$
- $\{z \in \mathbb{C} / |z - 2| = |z - 1 - i|\}$

4. Probar que

- | | |
|---|--|
| i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ | vii) $ z \cdot w = z \cdot w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ |
| ii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ | viii) $ z^{-1} = z ^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ |
| iii) $\overline{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ | ix) $ z + w \leq z + w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ |
| iv) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ | x) $ z - w \leq z - w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ |
| v) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ | xi) $ \operatorname{Re}(z) \leq z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ |
| vi) $z \cdot \bar{z} = z ^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ | xii) $ \operatorname{Im}(z) \leq z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ |

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

- | | |
|--|--|
| i) $z \neq 0$ y $z = \bar{z}^{-1}$ | vi) $ z - \bar{z} = \operatorname{Re}(z)$ |
| ii) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ | vii) $i(z^2 + 4) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$ |
| iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ | viii) $z^2 = 3 + 4i$ |
| iv) $ z ^2 = (z + \bar{z}) \cdot \operatorname{Im}(z)$ | ix) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$ |
| v) $z^2 + z^2 = i \cdot \bar{z}$ | x) $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$ |

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

- | | | |
|------------------------------|--------------------------|--|
| i) $3 + \sqrt{3}i$ | iii) $(-1 - i)^{-1}$ | v) $-\cos \frac{8}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{8}{3}\pi$ |
| ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$ | iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$ | vi) $\cos \frac{4}{7}\pi + i \operatorname{sen} \frac{-4}{7}\pi$ |

$$\text{vii) } \cos \frac{11}{5}\pi - i \sin \frac{19}{5}\pi \quad \text{viii) } \sin \frac{3}{4}\pi + i \cos \frac{3}{4}\pi \quad \text{ix) } \cos \frac{55}{3}\pi - \sin \frac{56}{3}\pi$$

7. Graficar en el plano complejo

- i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$
- ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-i.z) > \frac{\pi}{4}\}$
- iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

8. i) Calcular $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}$

ii) Calcular $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

9. Calcular las raíces n -ésimas de z en los casos

i) $n = 6, z = 8$

ii) $n = 4, z = -3$

iii) $n = 7, z = -1 + i$

iv) $n = 11, z = \frac{2i}{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$

10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

i) $z^4 = i \bar{z}^3$

iii) $z^8 = \bar{z}^8$

v) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$

ii) $z^6 = (2 - 2i)^{10}$

iv) $(z - 1)^4 = (\bar{z} + i)^4$

vi) $(z + 1)^4 = (z + i)^2$

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\}$. Probar que

i) G_n tiene n elementos

v) $w \in G_n \implies \bar{w} \in G_n$

ii) $z, w \in G_n \implies z.w \in G_n$

vi) $-1 \in G_n \iff n$ es par

iii) $w \in G_n \implies w^{-1} \in G_n$

vii) todo elemento de G_n es una potencia de $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$

iv) $w \in G_n \implies |w| = 1$

12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$

ii) $G_n \subseteq G_m \iff n \mid m$

13. Determinar las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .

14. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si \bar{w} lo es.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$

ii) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad entonces $w^k = 1$ si y solo si $n \mid k$

iii) $w \in G_n$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si $w \notin G_k$ para todo divisor propio $k \in \mathbb{N}$ de n (es decir, $k \mid n$ y $k < n$).

16. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$.

- i) Calcular $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$ para cada $w \in G_n$. Deducir que la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es cero.
- ii) Probar que el producto de todas las raíces n -ésimas de la unidad es $(-1)^{n-1}$

18. Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 15 .

19. Dado un número primo p , probar que:

- i) la suma de las raíces p -ésimas primitivas de la unidad es -1 .
- ii) la suma de las raíces p^2 -ésimas primitivas de la unidad es 0 .
- iii) Si q es un número primo distinto de p , entonces la suma de las raíces pq -ésimas primitivas de la unidad es 1 .
- iv) *¿Cuánto da la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad si n es un producto de primos distintos?

20. i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$

ii) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

21. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\operatorname{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$

22. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad.

i) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$

23. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w, \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$