Elementos de Cálculo Numérico

Primer cuatrimestre de 2008

Práctica N°5: Interpolación

1. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verificar utilizando el comando **polyfit** de `Matlab`. Graficar el polinomio interpolador, usando el comando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

2. Repetir el problema anterior, usando el método de coeficientes indeterminados.

3. (a) Construir las tablas de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearlas para construir los polinomios interpoladores.

   (b) Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4,\ y = 1$. Aumentar las tablas de diferencias divididas y calcular los polinomios interpoladores.

4. Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo [-1,1]. Graficar f junto con los polinomios que resultan de interpolar a f en los $n+1$ puntos equiespaciados $x_0 = -1, \ldots, x_i = x_0 + \dfrac{2i}{n}, \ldots, x_n = 1$; para $n = 5, 10, 15$.

5. Repetir el Ejercicio 4 para la función $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$ y para la función $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sin(\pi x)$.

6. Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2
y	1	1	0.5	4

7. Utilizando `Matlab`, encontrar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

8. Sea $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo $x \in [0,5]$,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32.5^{n+1}}{(n+1)!}$$

9. Sea f una función C^∞ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a,b]$ se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que, si $0 < C < \dfrac{1}{b-a}$ y P_n en un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos distintos, entonces P_n converge a f uniformemente, es decir, $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ cuando n tiende a ∞.

10. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1,1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$. Demostrar que si $a > 3$ entonces P_n converge a f uniformemente.

11. (a) Dado el intervalo $[a,b]$, sea m el punto medio entre a y b y sea $h \leq (b-a)/2$. Sea $p = m - h$ y $q = m + h$. Demostrar que para todo x en $[a,b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

(b) Sean $x_0 = a, \dots, x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$, $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que para todo x en $[a,b]$,

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

12. Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados en dicho intervalo.

(a) Demostrar que para todo $x \in [-\pi,\pi]$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Concluir que P_n converge uniformemente a f.

13. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$. Sea P_n el polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados.

(a) Usando el ejercicio 11, acotar el error $\|f - P_n\|_\infty$.

(b) Sea C_n la cota hallada en (a). Para $n = 1,3,5$, graficar simultáneamente f, $f + C_n$, $f - C_n$ y P_n.

14. Dado un intervalo $[a,b]$, decidir como tienen que estar distribuidos $n+1$ nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en el intervalo de modo que exista $x \in [a,b]$ tal que

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \sim (b-a)^{n+1}$$

15. (a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1,1]$.

(b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0,4]$.

16. Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$; $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio de Tchebychev T_{n+1}.

17. Repetir los Ejercicios 4 y 5 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n + 1$, para $n = 5, 10, 15$.

18. Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio p de grado 2 que satisfaga:
$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

19. Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar p de grado a lo sumo 3 que verifique:
$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \; p(0) = 1, & p'(0) = 1, & p'(1) = 2, & p(2) = 1; \\ \text{(b)} \; p(-1) = 1, & p'(-1) = 1, & p'(1) = 2, & p(2) = 1; \\ \text{(c)} \; p(-1) = 1, & p'(-1) = -6, & p'(1) = 2, & p(2) = 1. \end{array}$$
Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

20. Analizar para qué valores de $x_0,\ x_1,\ x_2$, y $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisface:
$$p(x_0) = \alpha_0,\ p(x_1) = \alpha_1,\ p'(x_2) = \alpha_2.$$
y cuándo este polinomio es único.

21. (a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique
$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$
(b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición
$$p''(1) = f''(1).$$

22. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{2x-1}$ y sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, T_{n+1}. Se interpola a f con un polinomio P de grado $\leq n + 1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0),\ P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 6$ entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que 10^{-3}.

23. Sea $f \in C^2[a, b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \ldots, x_n = b$, donde $h = (b - a)/n$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos x_i, $i = 0 \ldots n$.
(a) Probar que
$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$
(b) Para los $x \in [a, b]$ tales que l es derivable, probar que
$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$