Práctica 4: Medidas e Integración en espacios abstractos

Ejercicio 1. Sea Ω un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset \Omega$, definimos $\mu(E) = card(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Esta medida se suele llamar la medida de contar o *counting measure*.

(b) Dado $x_0 \in \Omega$. Si $E \subset \Omega$, definimos $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(\Omega)$. Esta medida suele llamarse Delta de Dirac.

(c) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Para cada $E \in \mathcal{F}$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en $\mathcal{F}$.

(d) Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Sean $\mu_1, ..., \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, ..., a_n$ constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$$

es una medida.

(e) Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en ese espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$

entonces μ es una medida.

(f) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Para cada $E \in \mathcal{F}$ definimos

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

Probar que μ_0 es una medida.

Ejercicio 2. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

(a) $A, B \in \mathcal{F} \quad \wedge \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \wedge \quad A_n \searrow \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 3. Un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se dice de medida completa si dado $Z \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \mathcal{F},\ Z_1 \Delta Z_2 \in \mathcal{F}$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \mathcal{F}$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ y $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$, entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

(c) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Revisar los ejercicios de la práctica y decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

(a) Si $E, F \in \mathcal{F}$ entonces $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

(b) Supongamos que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Si $\in \mathcal{F}$ entonces $\mu(E) = \mu(E + v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^N$.

(c) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{F}$ entonces $\mu(\text{lim inf } E_j) \leq \text{lim inf } \mu(E_j)$.

(d) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{F}$ entonces $\mu(\text{lim sup } E_j) \geq \text{lim sup } \mu(E_j)$.

Ejercicio 5. Sea $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$. Probar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$S \in \mathcal{F}, \quad \mu(S) < \delta \Rightarrow \int_S |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

Hint. Tomar φ simple, tal que $0 \leq \varphi \leq |f|$ y $\int \varphi\, d\mu \geq \int |f|\, d\mu - \varepsilon/2$. Luego $A = \sup \varphi < \infty$, y $\delta < \varepsilon/2A$.

Ejercicio 6. Sean $\Omega = \mathbb{N},\ \mathcal{F} = P(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = card(A)$. Probar que $f \in L^1(\mathrm{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathrm{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Ejercicio 7. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ y sea $A \in \mathcal{F}$,

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\mu = \int \chi_A f\, d\mu.$$

Probar que λ es una medida.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Probar que existe una menor clase monótona que contiene a $\mathcal{C}$. A esta clae se la denominca *Clase monótona generada por* $\mathcal{C}$.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Probar que la clase mónotona generada por $\mathcal{A}$ coincide con $\sigma(\mathcal{A})$.

Ejercicio 10. Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_{x_0})$ el espacio de medida definido en el Ejercicio 1. Determinar el conjunto de funciones medibles y hallar

$$\int f\, d\delta_{x_0}$$

Ejercicio 11. Teorema de Egorov: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k\geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformemente en A.

Ejercicio 12. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{y} \quad f_n \rightrightarrows f \text{ en } \Omega \setminus A_\varepsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

Ejercicio 13. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \xrightarrow{\mu} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Probar:

(a) Si $f_k \to_k f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E.

(b) Si $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $f_{k_j} \to_j f$ a.e. en E.

Ejercicio 14. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int_\Omega \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$, probar que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

(b) Si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, probar que $\int_\Omega \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$.

Ejercicio 15. Sean $\Omega = \mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathcal{N}$ tal que:

$$\mu(E) = \sum_{n: n\in E} \frac{1}{n^2}.$$

(a) Probar que μ es una medida finita.

(b) Para cada $k \in N$, definimos $f_k : \Omega \to R$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & k < n. \end{cases}$$

Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.

(c) Sea $f : \Omega \to R$, $f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in N)$. ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(\Omega, \mu)$?

Ejercicio 16. Probar que el Teorema de convergencia Dominada vale, si se cambia convergencia puntual, por convergencia en medida.

Ejercicio 17. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Notemos $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Probar que

(a) Si f es una función medible $\mathcal{F}$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(b) Si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A, B \in \mathcal{B}$ y $A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces f es medible $\mathcal{F}$ si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 18. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $E \in \mathcal{F}$. Sea $(f_k)_{k\geq 1} : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$ existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f_k(x)| \leq M_x$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Probar que si para todo $\alpha > 0$ existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}) \leq \alpha/k,$$

entonces $\mu(E) = 0$.

Ejercicio 19.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $E \in \mathcal{F}$ un subconjunto de Ω de medida finita y sean $(f_n)_{n\geq 1}, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tales que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que

  (i) $\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$,

  (ii) Para cada $i \geq 1$, $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ en E_i.

(b) Probar que el mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 20. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \mathcal{F}$ y finitas en casi todo punto. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $\mu(A \setminus A_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejercicio 21. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$ sobre E.

(a) Probar que $f_k + g_k \xrightarrow{\mu} f + g$ sobre E.

(b) Probar que si $|E| < +\infty$, entonces $f_k g_k \xrightarrow{\mu} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis $|E| < +\infty$, no puede quitarse.

(c) Sea $(\frac{f_k}{g_k})_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Probar que si $|E| < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $\frac{f_k}{g_k} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{g}$.