

ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2008.

PRACTICA 0: Conjuntos

1. Sean  $(X_i)_{i \in I}$  y  $(Y_j)_{j \in J}$  dos familias de conjuntos. Probar:

$$a) \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$$

$$b) \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$$

$$c) \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \times \left( \bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

$$d) \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \times \left( \bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

e) Si  $I = J$  y  $\forall i \in I$  se tiene  $Y_i \subset X_i$  entonces

$$\left( \bigcup_{i \in I} Y_i \right) \subset \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left( \bigcap_{i \in I} Y_i \right) \subset \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right)$$

f) Si  $A \subset I$  entonces

$$\left( \bigcup_{i \in A} X_i \right) \subset \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \subset \left( \bigcap_{i \in A} X_i \right)$$

g) Para cada conjunto  $F$  se tiene:

$$F - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (F - X_i)$$

2. a) Sean  $A_{nk}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$  conjuntos. Probar que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{nk} \supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{nk}$$

- b) Encontrar conjuntos  $A_{nk}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$  tales que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{nk} \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{nk}$$

3. Sean  $(J_l)_{l \in L}$  y  $(X_i)_{i \in I}$  dos familias de conjuntos tales que  $I = \bigcup_{l \in L} J_l$ . Probar:

$$a) \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{l \in L} \left( \bigcup_{i \in J_l} X_i \right)$$

$$b) \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} \left( \bigcap_{i \in J_l} X_i \right)$$

4. Si  $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$  con  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$ ,  $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$  y  $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$  entonces

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

5. Sean  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \subset E$ ,  $B \subset E$ ,  $C \subset F$ ,  $D \subset F$ . Probar:

$$a) A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$b) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$c) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$d) \text{ si } f \text{ es inyectiva } \Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$e) A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ y } f(f^{-1}(D)) \subset D$$

$$f) \text{ si } f \text{ es inyectiva } \Rightarrow f(E - A) \subset F - f(A)$$

$$g) \text{ si } f \text{ es suryectiva } \Rightarrow f(E - A) \supset F - f(A)$$

$$h) f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$$

6. Sea  $f : E \rightarrow F$  una función. Sean  $(X_i)_{i \in I}$  y  $(Y_j)_{j \in J}$  dos familias de subconjuntos de  $E$  y  $F$  respectivamente. Probar:

- a)  $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$
- b)  $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
- c) si  $f$  es inyectiva  $\Rightarrow f(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
- d)  $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$
- e)  $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$

7. Dada una sucesión  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $E$ , se define:

$$\underline{\lim} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite inferior})$$

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite superior})$$

Probar:

- a)  $E - \underline{\lim} E_n = \overline{\lim} (E - E_n)$
- b)  $E - \overline{\lim} E_n = \underline{\lim} (E - E_n)$
- c)  $\underline{\lim} E_n \subset \overline{\lim} E_n$   
Si  $\underline{\lim} E_n = \overline{\lim} E_n$ , entonces se dice que existe el límite de la sucesión  $E_n$  y a este conjunto se lo denota por  $\lim E_n$ . Probar:
- d) Si  $E_{n+1} \subset E_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$
- e) Si  $E_n \subset E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$
- f) Dada una sucesión de subconjuntos de  $E$  se define:

$$\begin{cases} D_0 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Probar que existe  $\lim D_n$  si y sólo si  $\lim E_n = \emptyset$ .

8. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de un conjunto  $X$ , se define:

$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- a)  $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \quad \forall x \in X$

$$b) \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \quad \forall x \in X$$

$$c) \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \quad \forall x \in X$$

9. Sea  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$  y  $f : X \rightarrow Y$ . Probar:

$$a) f(\underline{\lim} E_n) \subset \underline{\lim} f(E_n)$$

$$b) f(\overline{\lim} E_n) \subset \overline{\lim} f(E_n)$$

$$c) f(\underline{\lim} E_n) \subset \overline{\lim} f(E_n)$$

d) Si  $f$  es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

10. Sea  $E$  un conjunto y  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tal que si  $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ . Sean  $R = \{Z \subseteq E : f(Z) \subseteq Z\}$  y  $S = \bigcup \{Z \subseteq E : Z \subseteq f(Z)\}$ . Sean también:

$$V = \bigcap_{Z \in R} Z \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{Z \in S} Z.$$

Probar que:

$$a) f(V) = V \text{ y } f(W) = W.$$

$$b) \text{ Si } A \subset E \text{ tal que } f(A) = A \Rightarrow V \subset A \subset W.$$