Práctica 6

Ejercicio 1. Sea M un A-módulo no nulo finitamente generado. Probar que si $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M entonces existen $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}$ tales que $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Ejercicio 2. Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $\mathcal{S}$ un sistema de generadores de M. Decimos que $\mathcal{S}$ es un *sistema de generadores minimal* de M si ningún subconjunto propio de $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M.

Probar que:

(a) Todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ (considerando a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo) un sistema de generadores minimal con n elementos.

Ejercicio 3. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Diremos que M es *localmente cíclico* si todo submódulo de M de tipo finito es cíclico.

Probar que:

(a) Todo submódulo de un módulo localmente cíclico es localmente cíclico.

(b) Si M es localmente cíclico y $f : M \to N$ es un epimorfismo de A-módulos entonces N es localmente cíclico.

(c) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) localmente cíclicos pero no son de tipo finito.

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que:

(a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(a) \neq 0$.

(b) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $\det(a) \in \mathcal{U}(A)$.

Ejercicio 5. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(a) De todo sistema de generadores de M puede extraerse una base.

(b) Todo conjunto linealmente independiente en M puede extenderse a una base.

(c) Todo módulo es libre.

(d) Todo submódulo de un módulo libre es libre.

(e) Si $x \in M$ es no nulo, entonces $\{x\}$ es linealmente independiente.

(f) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.

(g) Existen módulos no libres en los que todo elemento no nulo es linealmente independiente.

(h) Si A es un anillo íntegro y M es un A-módulo libre, entonces todo elemento no nulo de M es linealmente independiente.

Ejercicio 6. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal, entonces M es noetheriano.

Ejercicio 7. Dar un ejemplo de

(a) Un A-módulo finitamente generado que no sea noetheriano.

(b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea noetheriano.

Ejercicio 8. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in \mathrm{End}_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = \ker(f^n)$, $I_n = \mathrm{im}(f^n)$. Probar que:

(a) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.

(b) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.

(c) Si M es noetheriano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.

(d) Si M es noetheriano y f es un epimorfismo, entonces f es un automorfismo.

Ejercicio 9. Probar que si $f : A \to B$ es un epimorfismo de anillos y A es noetheriano, entonces B es noetheriano.

Ejercicio 10. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d}$ una raíz cuadrada de d en $\mathbb{C}$. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ el subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los elementos de la forma $a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un anillo noetheriano.

Ejercicio 11. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(a) Si M es libre entonces es sin torsión.

(b) Si A es un anillo íntegro, entonces todo A-módulo libre es sin torsión.

(c) Todo submódulo de un módulo divisible es divisible.

(d) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión, entonces $\mathrm{im}(f)$ es de torsión.

(e) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión, entonces $\mathrm{im}(f)$ es sin torsión.

(f) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es divisible, entonces $\mathrm{im}(f)$ es divisible.

(g) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y M es reducido, entonces $\mathrm{im}(f)$ es reducido.

Ejercicio 12. Sea A un dominio íntegro y sea M un A-módulo. Probar que:

(a) $t(M)$ es un submódulo de M y $M/_{t(M)}$ es sin torsión.

(b) $t(M)$ es el máximo submódulo de M que es de torsión.

(c) $t(S) = S \cap t(M)$ para todo submódulo S de M.

Ejercicio 13. Calcular $t\left(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\right)$.

Ejercicio 14. Sea A un anillo conmutativo y sea M un A-módulo. Probar que:

(a) $d(M)$ es un submódulo de M y $M/_{d(M)}$ es reducido.

(b) $d(M)$ es el máximo submódulo de M cuyos elementos son divisibles en M.

(c) $d(S) \subseteq S \cap d(M)$ para todo submódulo S de M.

Ejercicio 15. Sea A un dominio íntegro y sea M un A-módulo. Probar que

$$d(t(M)) = t(d(M)) = t(M) \cap d(M).$$

Ejercicio 16. Sea A un anillo conmutativo y sean M y N A-módulos. Probar que:

(a) Si M es divisible, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.

(b) Si N es sin torsión, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.

(c) Si M es de torsión, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es reducido.

(d) Si N es reducido, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es reducido.

(e) Si M es divisible y N es reducido, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

(f) Si M es de torsión y N es sin torsión, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

Ejercicio 17. Probar que:

(a) $\mathbb{Z}$ es un grupo reducido.

(b) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son divisibles, ya sea como grupos abelianos o como módulos sobre los anteriores.

(c) Todo K-espacio vectorial (K cuerpo) es divisible.

Ejercicio 18. Un submódulo S de un A-módulo M se dice *puro* si $S \cap (aM) = aS$ para todo $a \in A$.

Sea M un A-módulo y sea S un submódulo de M. Probar que:

(a) Si S es puro, entonces $S \cap d(M) \subseteq d(S)$.

(b) Si S es divisible, entonces S es puro.

(c) Si S es puro y M es divisible, entonces S es divisible.

(d) Si A es un dominio íntegro, entonces $t(M)$ es un submódulo puro de M.

(e) Si S es puro y M es sin torsión, entonces $M/_S$ es sin torsión.

Ejercicio 19. Probar que no existe un epimorfismo de grupos:

(a) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$.

(b) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

(c) de $\mathbb{Q}/_\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 20. Sea p un primo. Probar que no existe una sección:

(a) de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$.

(b) de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$.

(c) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$.

Ejercicio 21. Calcular

(a) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_p)$.

(b) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{p\ primo}\mathbb{Z}_p, G_3)$.

Ejercicio 22. Sea $M = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ y sea $H = \{(a,b,c)\in M : 2 \mid a+b+c \text{ y } 3 \mid b\}$.

(a) Caracterizar $M/_H$.

(b) Probar que H no es un sumando directo de M.

Ejercicio 23. Sea M un A-módulo y sean S y T submódulos de M. Probar que $M \simeq S\oplus T$ si y sólo si existe $e : M \longrightarrow M$ proyector ($e^2 = e$) tal que $S = \ker(e)$ y $T = \mathrm{im}(e)$.

Ejercicio 24. Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es noetheriano si y sólo si M_i es noetheriano para todo $i \in I$ y $M_i = 0$ para casi todo $i \in I$.

Ejercicio 25. Sea A un anillo y sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que:

(a) $d\left(\prod_{i\in I} M_i\right) = \prod_{i\in I} d(M_i)$.

(b) $d\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} d(M_i)$.

Ejercicio 26. Sea A un anillo y sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que:

(a) $t\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \subseteq \prod_{i\in I} t(M_i)$.

(b) $t\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigoplus_{i\in I} t(M_i)$ y, cuando A es un dominio íntegro, vale la igualdad.

Ejercicio 27. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G \simeq S\oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G, entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

Ejercicio 28.

(a) Sea $e : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ un morfismo de grupos. Probar que e es un proyector si y sólo si existe $a \in \mathbb{Z}_n$ tal que $n \mid a^2 - a$ y $e(x) = a.x$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$.

(b) Sea $a \in \mathbb{Z}_n$, sea $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ el morfismo definido por $f(x) = ax$ y sea $d = (a : n)$. Probar que $\ker(f) = \left\langle \frac{n}{d} \right\rangle$ y que $\mathrm{im}(f) = \langle d\rangle$.

(c) Sean $n, d \in \mathbb{Z}$. Probar que si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, \dots, p_r$ primos positivos distintos y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, entonces son equivalentes:

I. $d = (a : n)$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que $n \mid a^2 - a$.

II. $d = p_1^{\beta_1 \alpha_1} \cdots p_r^{\beta_r \alpha_r}$ con $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \beta_i \leq 1$.

(d) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ y, para cada uno de ellos, determinar un suplemento.

Ejercicio 29. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

(a) f es sección si y sólo si f es monomorfismo e $\mathrm{im}(f)$ es un sumando directo de N.

(b) f es retracción si y sólo si f es epimorfismo y $\ker(f)$ es un sumando directo de M.

Ejercicio 30. Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\gamma"] & N \arrow[r, "\delta"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que existe un único morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f y f' son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

Ejercicio 31. Sea

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Probar que:

(a) Si N es finitamente generado, entonces P es finitamente generado.

(b) Si M y P son finitamente generados, entonces N es finitamente generado.

(c) N es noetheriano si y sólo si M y P son noetherianos.

Ejercicio 32. (Lema de los cinco) Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C' \arrow[r, "g_3"] & D' \arrow[r, "g_4"] & E' \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que si α, β, δ y ε son isomorfismos, entonces γ es un isomorfismo.

Ejercicio 33. Sea A un anillo, sean M_1, M_2, M_3 A-módulos y sean $f : M_1 \to M_2$ y $g : M_2 \to M_3$ morfismos de A-módulos. Probar que la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

es exacta si y sólo si para todo A-módulo M la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos inducida

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, M_1) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M, M_2) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, M_3)$$

es exacta, donde $f^* : \operatorname{Hom}(M, M_1) \to \operatorname{Hom}(M, M_2)$ y $g^* : \operatorname{Hom}(M, M_2) \to \operatorname{Hom}(M, M_3)$ son los morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos inducidos por f y g respectivamente.

Ejercicio 34. Determinar cuántos elementos de orden 6 hay en cada grupo abeliano de orden 36.

Ejercicio 35. Caracterizar los grupos abelianos G, finitamente generados, tales que todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

Ejercicio 36. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

(a) $G = \langle a, b, c : \ 2a + 3b = 0,\ 2a + 4c = 0 \rangle$.

(b) $G = \langle a, b, c : \ 5a + 5b = 0,\ 5b + 5c = 0 \rangle$.

(c) $G = \langle a, b, c : \ 2a + 2b + 2c = 0,\ 3b = 6c \rangle$.

(d) $G = \langle a, b, c : \ a = 3b,\ a = 3c \rangle$.

(e) $G = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n : \ 2a_0 + 2a_1 + \cdots + 2a_n = 0,\ 3a_1 + 3a_2 + \cdots + 3a_n = 0 \rangle$.

(f) $G = \langle a, b, c, d : \ 2a + 3b + 5c + 7d = 0 \rangle$.