Práctica 6 - Adicionales

Ejercicio 1. Sea A un dominio de ideales principales, y sea M un A-módulo. Probar que:

(a) Si M es finitamente generado y S es un submódulo libre de M tal que $M/_S$ es sin torsión, entonces M es libre.

(b) Si M no es de torsión y $M/_S$ es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$, entonces $M \simeq A$.

(c) Si G es un grupo abeliano infinito tal que $[G : H]$ es finito para todo subgrupo no nulo H, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2.

(a) Sea G un grupo abeliano finito, y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

(b) Sea G un grupo abeliano de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos). Determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

Ejercicio 3. Caracterizar todos los grupos abelianos finitamente generados G tales que:

(a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

(b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

(c) G posee exactamente dos subgrupos propios no nulos.

(d) G posee exactamente tres subgrupos propios no nulos.

(e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

(f) Para todo par de subgrupos H y K de G, se tiene que $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

(g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

(h) $G/_H$ es cíclico para todo subgrupo no nulo H.

(i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.