Práctica 5

A lo largo de esta práctica todos los módulos que consideraremos serán módulos *a izquierda.*

Ejercicio 1. Determinar si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \mid n$, con la suma usual de $\mathbb{Z}_m$ y la acción
$$a \cdot x = r_m(ax).$$

(b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción
$$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_{11} & az_{12} \\ az_{21} & az_{22} \end{pmatrix}.$$

(c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción
$$f \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(1)x_1, f(0)x_2, \dots, f(0)x_n).$$

(d) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción
$$a \cdot m = \det(a)m.$$

Ejercicio 2. Sea A un anillo y sean M y N A-módulos. Probar que $M \times N$ con la suma
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
y la acción
$$a \cdot (x, y) = (ax, ay)$$
es un A-módulo, que será denotado $M \oplus N$.

Ejercicio 3. Sea K un cuerpo.

(a) Sea V un K-espacio vectorial y sea $u \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que existe una única estructura de $K[X]$-módulo en V que satisface
$$\begin{aligned} (kX^0) \cdot v &= kv, \\ X \cdot v &= u(v). \end{aligned}$$

(b) Sea M un $K[X]$-módulo y sea $u : M \to M$ la aplicación definida por $u(v) = X.v$ Probar que con la acción

$$k \cdot v = (kX^0)v,$$

M es un K-espacio vectorial y $u \in \mathrm{End}_K(M)$.

Ejercicio 4. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot_\varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

Ejercicio 5. Sea M un A-módulo y sea S un subconjunto de M. Se llama *anulador* de S al conjunto

$$\mathrm{Ann}(S) = \{a \in A : a \cdot s = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $\mathrm{Ann}(\{x\})$ será denotado $\mathrm{Ann}(x)$. Un A-módulo M se dice *fiel* si $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$. Probar que

(a) $\mathrm{Ann}(S)$ es un ideal a izquierda de A.

(b) $\mathrm{Ann}(S) = A$ si y sólo si $S \subseteq \{0\}$.

(c) Si $S \subseteq T$ entonces $\mathrm{Ann}(T) \subseteq \mathrm{Ann}(S)$.

(d) $\mathrm{Ann}(S) = \bigcap_{s \in S} \mathrm{Ann}(s)$.

(e) $M_n(A)$ es un A-módulo fiel, y exhibir otros ejemplos de módulos fieles.

(f) $\mathbb{Z}_n$, con $n > 2$, no es un $\mathbb{Z}$-módulo fiel y hallar $\mathrm{Ann}(\mathbb{Z}_n)$.

(g) Si $J \neq \emptyset$ entonces $\mathrm{Ann}(M^J) = \mathrm{Ann}(M^{(J)}) = \mathrm{Ann}(M)$.

Ejercicio 6. Sea M un A-módulo y sean S un subconjunto de M y N un submódulo de M. Se llama *transportador* de S en N al conjunto

$$(N : S) = \{a \in A : a \cdot s \in N \quad \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ será denotado $(N : x)$.

(a) Probar que

  I. $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.
  II. $(0 : S) = \mathrm{Ann}(S)$ y $(N : S) = A$ si y sólo si $S \subseteq N$.
  III. Si $S \subseteq T$ entonces $(N : T) \subseteq (N : S)$.
  IV. Si P es un submódulo de M tal que $N \subseteq P$ entonces $(N : S) \subseteq (P : S)$.
  V. $(N : x) \cdot x = N \cap A \cdot x$.
  VI. Si $J \neq \emptyset$ entonces $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$.

(b) Hallar $(m\mathbb{Z} : n)$ para $m, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7. Determinar si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

(a) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \; \forall\, 1 \leq i \leq n\}$.

(b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(a_{ij}) = 0\}$.

(c) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

(d) A un anillo cualquiera, $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Ejercicio 8. Sea A un anillo conmutativo y sea $a \in A^{n \times m}$. Probar que la aplicación $f_a : A^{m\times 1} \to A^{n \times 1}$ definida por $f_a(x) = a \cdot x$ (donde $\cdot$ es el producto de matrices) es un morfismo de A-módulos.

Ejercicio 9. Sea A un anillo conmutativo y sea M un A-módulo. Probar que f es un morfismo de A-módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo, en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f : M^n \to M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ $(n > 2)$.

(b) $f : M^n \to M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n)$.

(c) Si $n \leq m$, $f : M^n \to M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots 0)$.

(d) Si $n \leq m$, $f : M^m \to M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

(e) Fijado $a \in A$, $f : A[X] \to A$, $f(g) = g(a)$.

(f) $f : M_n(A) \to A^n$, $f(a) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$.

Ejercicio 10. Sean M, N y P A-módulos y sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ dos funciones. Probar que

(a) Si f y g son morfismos de A-módulos, entonces $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos.

(b) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y g es un monomorfismo, entonces f es un morfismo de A-módulos.

(c) Si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y f es un epimorfismo, entonces g es un morfismo de A-módulos.

Ejercicio 11. Si M y N son conjuntos y $f : M \to N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

se llama *gráfico* de f. Probar que si M y N son A-módulos entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

Ejercicio 12. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, entonces $\ker(f)$ es un submódulo de M, $\operatorname{Im}(f)$ es un submódulo de N y $M/_{\ker(f)} \simeq \operatorname{Im}(f)$.

Ejercicio 13. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente $N/_S$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

(b) $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

(c) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.

(d) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n\}$.

(e) $N = M^J$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \quad \forall\, i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J.

Ejercicio 14.

(a) Probar que si $f, g : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ son morfismos de grupos entonces son equivalentes:

  I. $f(1) = g(1)$.
  II. $f(m) = g(m)\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$.
  III. $f = g$.

(b) Probar que si $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ es un morfismo de grupos tal que $f(1) = 1$ entonces $f = id_{\mathbb{Q}}$.

(c) Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una aplicación. Probar que f es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si y sólo si $f : (V, +) \to (W, +)$ es un morfismo de grupos.

Ejercicio 15. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que

(a) $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es un grupo abeliano.

(b) Si A es conmutativo, la acción $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ define sobre el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ una estructura de A-módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{C}(A)$-módulo.

Ejercicio 16. Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos y sea M un A-módulo.

(a) Consideremos a B como A-módulo con la acción definida en el ejercicio 4. Probar que la acción $(b \cdot f)(b') = f(b'b)$ define sobre el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ una estructura de B-módulo

(b) El B-módulo $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ definido en (a) puede considerarse como A-módulo con la acción de φ. Probar que si A y B son conmutativos entonces esta estructura de A-módulo sobre $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ coincide con la definida en el ejercicio 15.

Ejercicio 17. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Probar que la aplicación $\psi : M \to M^{**}$ definida por

$$\psi(x)(f) = f(x) \qquad (x \in M,\ f \in M^*)$$

es un morfismo de A-módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

Ejercicio 18. Sea M un A-módulo. Probar que $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos.

Ejercicio 19. Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

Ejercicio 20. Un A-módulo M se dice *simple* si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.

Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A \cdot x = M$ $\forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$.

Ejercicio 21. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que

(a) Si M es simple, entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

(b) Si N es simple, entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

(c) Si M y N son simples, entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

Ejercicio 22. Sea M un A-módulo. Probar que $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M, M)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.