Práctica 4

Ejercicio 1. Dar ejemplo(s) de:

(a) Un anillo sin identidad.

(b) Un anillo de división que no sea cuerpo.

(c) Un anillo que no sea íntegro.

(d) Un anillo íntegro que no sea de división.

(e) Un dominio íntegro que no sea dominio principal.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo. Se definen en $K \times K$ las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned}$$

(a) Probar que $(K \times K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

(b) Probar que cuando K es $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ o $\mathbb{Z}_5$ entonces $K \times K$ no es cuerpo, mientras que si K es $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$ o $\mathbb{Z}_7$, sí lo es.

(c) Probar que $(a,b) \in K \times K$ es inversible si y sólo si $a^2+b^2 \neq 0$.

(d) Deducir que $K \times K$ es cuerpo si y sólo si dados $a, b \in K$ se tiene

$$a^2+b^2=0 \iff a=b=0.$$

(e) Probar que si p es primo, $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ es cuerpo si y sólo si p es de la forma $4k+3$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3. Sea A un anillo y sea $\mathcal{U}(A)$ el conjunto de los elementos de A que tienen inverso multiplicativo.

(a) Probar que $(\mathcal{U}(A), \cdot)$ es un grupo, llamado el *grupo de unidades* de A.

(b) Caracterizar $\mathcal{U}(A)$ en los siguientes casos:

i. $A = \mathbb{Z}$

ii. $A = \mathbb{Z}[i]$

iii. $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

iv. $A = B[X]$, con B dominio íntegro

Ejercicio 4. Probar que si A es un dominio íntegro finito, entonces es un cuerpo.

Ejercicio 5.

(a) Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son $\{0\}$ y A.

(b) Sea K un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(K)$ son 0 y $M_2(K)$. ¿Es $M_2(K)$ un anillo de división?

Ejercicio 6. Probar que si K es un cuerpo entonces $K[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

Ejercicio 7. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8. Probar que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$, entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. Sea A un anillo conmutativo. Probar que $\{0\}$ es un ideal primo de A si y sólo si A es un dominio íntegro.

Ejercicio 10. Hallar todos los ideales maximales de $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{21}$ y $\mathbb{Z}_{24}$.

Ejercicio 11. Sea A un anillo conmutativo. Probar que todo ideal maximal de A es un ideal primo de A.

Ejercicio 12. Determinar si existe un morfismo de anillos de A en B en cada uno de los siguientes casos (K denota a un cuerpo):

(a)	$A = \mathbb{Z}[i]$	$B = \mathbb{R}$
(b)	$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	$B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
(c)	$A = K$	$B = M_2(K)$
(d)	$A = M_2(K)$	$B = K$

Ejercicio 13. Hallar todos los morfismos de anillos de $\mathbb{Z}[i]$ en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 14. Sean A y B anillos conmutativos y sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que:

(a) Si $\mathcal{I}$ es un ideal de B, entonces $f^{-1}(\mathcal{I})$ es un ideal de A que contiene a $\ker(f)$.

(b) Si $\mathcal{I}$ es un ideal de A y f es epimorfismo, entonces $f(\mathcal{I})$ es un ideal de B.

(c) Si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de B, entonces $f^{-1}(\mathcal{I})$ es un ideal primo de A.

(d) Si f es epimorfismo y $\mathcal{I}$ es un ideal maximal de B, entonces $f^{-1}(\mathcal{I})$ es un ideal maximal de A.

Ejercicio 15. Probar que:

(a) Si K es un cuerpo y $f : K \to B$ es un morfismo de anillos, entonces f es inyectivo.

(b) Si A es un anillo conmutativo tal que todo morfismo de anillos que tiene como conjunto de partida a A es inyectivo, entonces A es un cuerpo.

Definición: Si A es un anillo, un *cuerpo de cocientes* de A es un par (K, i), donde K es un cuerpo e $i : A \to K$ es un monomorfismo de anillos, con la siguiente propiedad:

Para todo cuerpo L y todo monomorfismo de anillos $f : A \to L$, existe un único morfismo de anillos $\mu : K \to L$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & K \arrow[dl, dotted, "\mu"] \\ L & \end{tikzcd}$$

(es decir, tal que $\mu \circ i = f$).

Ejercicio 16. Sea A un anillo. Probar que:

(a) Si (K, i) y (E, j) son cuerpos de cocientes de A, entonces existe un (único) isomorfismo de anillos $\mu : K \to E$ tal que $\mu \circ i = j$.

(b) Si A es un dominio íntegro, en el conjunto $A \times (A \setminus \{0\})$ definimos la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } ad - bc = 0.$$

i. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii. Definimos en $K = A \times (A \setminus \{0\})/\sim$ las operaciones $+$ y $\cdot$ en la forma

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} &= \overline{(ad + bc, bd)}, \\ \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} &= \overline{(ac, bd)}, \end{aligned}$$

y consideramos la aplicación $i : A \to K$ definida por $i(a) = \overline{(a, 1)}$.
Probar que las operaciones $+$ y $\cdot$ están bien definidas y que (K, i) es un cuerpo de cocientes de A.

(c) Probar que existe un cuerpo de cocientes de A si y sólo si A es un dominio íntegro.

(d) Caracterizar el cuerpo de cocientes de los siguientes dominios íntegros:

i. $\mathbb{Z}$

ii. $\mathbb{Z}[i]$

iii. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

iv. $A[X]$, con A un dominio íntegro

v. K, con K un cuerpo

Ejercicio 17. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que:

(a) $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/_{\mathcal{I}}$ es un dominio íntegro.

(b) $\mathcal{I}$ es un ideal maximal de A si y sólo si $A/_{\mathcal{I}}$ es un cuerpo.

Ejercicio 18. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$. Probar que $K[X]/_{< f >}$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible en $K[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo K por un anillo conmutativo A?

Ejercicio 19. Probar que para todo anillo A existe un subanillo B de A tal que $B \simeq \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 20. Probar que $\mathbb{Z}[X]/_{< X^2+1 >} \simeq \mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 21. Caracterizar $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/_{< 1+2\sqrt{5} >}$.

Ejercicio 22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/_{< p >} \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.

Ejercicio 23. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X]/_{< X^3 >}$.

Ejercicio 24. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in A$. Probar que:

(a) Si a es primo, entonces a es irreducible.

(b) Si A es DFU (dominio de factorización única) y a es irreducible, entonces a es primo.

(c) Si $f : A \to B$ un isomorfismo de anillos, entonces a es irreducible en A si y sólo si $f(a)$ es irreducible en B.

Ejercicio 25. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ no son DFU.

Ejercicio 26. Hallar A, B y C dominios íntegros tales que $A \subseteq B \subseteq C$ y A y C sean DFU pero B no.

Ejercicio 27. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que:

(a) p es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si p no es suma de dos cuadrados en $\mathbb{Z}$.

(b) p es suma de dos cuadrados en $\mathbb{Z}$ si y sólo si $p = 2$ o p es de la forma $4k + 1$.

(c) p es primo en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si p es de la forma $4k + 3$.

Ejercicio 28.

(a) Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$. Probar que $a + bi$ es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si $a^2 + b^2$ es un primo (de $\mathbb{Z}$) no congruente a 3 módulo 4.

(b) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Probar que a es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si a es un primo (de $\mathbb{Z}$) congruente a 3 módulo 4.

(c) Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$. Probar que si $a + bi$ es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$, entonces $\mathbb{Z}[i]/_{< a + bi >} \simeq \mathbb{Z}_p$, donde $p = a^2 + b^2$.

(d) Probar que si $p \in \mathbb{Z}$ es un primo de la forma $4k + 3$, entonces $\mathbb{Z}[i]/_{< p >} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, con las operaciones definidas en el ejercicio 2.