

PRÁCTICA 3

Ejercicio 1. Determinar todos los subgrupos de Sylow de A_5 y D_n .

Ejercicio 2.

- (a) ¿Cuántos elementos de orden 7 posee un grupo simple de orden 168?
- (b) ¿Cuántos elementos de orden 13 posee un grupo de orden 39? ¿Cuántos de orden 3? ¿Cuántos de orden 39?

Ejercicio 3. Probar que existen grupos no abelianos de orden 21. ¿Cuántos p -subgrupos de Sylow ($p = 3$ o $p = 7$) tienen?

Ejercicio 4. Sea $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$.

- (a) Encontrar los subgrupos de Sylow de G .
- (b) Probar que G tiene un subgrupo invariante isomorfo a \mathcal{H} .

Ejercicio 5. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.

Ejercicio 6. Sea G un grupo de orden 27.5. Probar que si G posee más de un subgrupo invariante de orden 3, entonces G es abeliano y no cíclico.

Ejercicio 7.

- (a) Probar que existen grupos no abelianos de orden 3.7.11.
- (b) Sea G un grupo no abeliano de orden 3.7.11. Probar que $[G, G]$ es cíclico y calcular su orden.

Ejercicio 8. Probar que hay exactamente 4 grupos no isomorfos de orden 30.

Ejercicio 9. Sean p y q primos impares tales que $p < q < 2p$. Caracterizar todos los grupos de orden $p^2 \cdot q$.

Ejercicio 10. Probar que no existen grupos simples de orden

- (a) p^n , con p primo y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- (b) $p \cdot q$, con p y q primos distintos.
- (c) $p^2 \cdot q$, con p y q primos distintos.
- (d) $p^2 \cdot q^j$, con p y q primos distintos tales que $p < q$ y $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.
- (e) $p^3 \cdot q$, con p y q primos distintos.

Ejercicio 11. Sea G un grupo de orden n y sea p un primo tal que $p \mid n$. Probar que si H es un p -subgrupo de Sylow de G entonces $[G : N(H, G)] = r_p$, donde r_p denota a la cantidad de p -subgrupos de Sylow de G .

Ejercicio 12. Sea G un grupo de orden n .

- (a) Probar que si existe un subgrupo H de G no trivial tal que $m = [G : N(H, G)]$ satisface $m! < n$, entonces G no es simple.
- (b) Probar que si n no es primo y para algún primo p tal que $p \mid n$ se verifica $r_p! < n$, entonces G no es simple.

Ejercicio 13. Caracterizar todos los grupos simples G tales que $|G| \leq 100$.