Práctica 2

Ejercicio 1. Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G de índice n. Sea Ω el conjunto de coclases a derecha $Ha \quad (a \in G)$.

(a) Para cada $x \in G$ definimos

$$\varphi_x : \Omega \to \Omega, \qquad Ha \mapsto Hax^{-1}.$$

Probar que $\varphi_x \in S_\Omega$ para todo $x \in G$.

(b) Probar que la aplicación $\varphi : G \to S_\Omega$ definida por $\varphi(x) = \varphi_x$ es un morfismo de grupos.

(c) Sea $K = \ker(\varphi)$. Probar que K es un subgrupo invariante de G, contenido en H, y que $[G : K]$ divide a $n!$.

Ejercicio 2. Sea G un grupo finito de orden m y sea p el menor primo que divide a m. Probar que si H es un subgrupo de G de índice p entonces $H \triangleleft G$.

Ejercicio 3. Sea G un grupo finito de orden mp, con p primo tal que $p \geq m$. Probar que si H es un subgrupo de G de orden p entonces $H \triangleleft G$.

Ejercicio 4. Encontrar un sistema de representantes de G módulo H en los casos:

(a) $G = \mathbb{R}, \qquad H = \mathbb{Z}$.

(b) $G = GL_n(\mathbb{R}), \qquad H = SL_n(\mathbb{R})$.

(c) $G = D_n, \qquad H = \langle \rho \rangle$.

(d) $G = \mathbb{C}^*, \qquad H = S^1$.

(e) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-, \qquad H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- : a \equiv b \quad (2)\}$.

(f) $G = \mathbb{C}^*, \qquad H = \mathbb{R}^* \cup i.\mathbb{R}^*$.

(g) $G = \mathbb{C}^*, \qquad H = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Ejercicio 5. Probar que

(a) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$

(b) $\mathbb{Z}/m.\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$

(c) $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$

(d) $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$

(e) $S^1/G_n \simeq S^1$

(f) Si $m \mid n$, entonces $G_n/G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$

Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes casos, probar que $H \triangleleft G$ y caracterizar G/H.

(a) $G = S_4$, $\quad H = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

(b) $G = D_6$, $\quad H = \{1, \rho^3\}$.

(c) $G = \mathcal{H}$, $\quad H$ un subgrupo cualquiera.

(d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_6,\ \text{con } (b, 6) = 1 \right\}$, $\quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_6,\ \text{con } (b, 6) = 1 \right\}$, $\quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(f) G y H como en el ejercicio 4.

Ejercicio 7. Sea $(G, *)$ un grupo. Si T es un subconjunto no vacío de G, definimos el *normalizador* de T en G por

$$N(T, G) = \{g \in G : g * T * g^{-1} = T\}$$

y el *centralizador* de T en G por

$$\mathcal{C}(T, G) = \{g \in G : g * t = t * g \quad \forall t \in T\}$$

Supongamos que G actúa sobre un conjunto X no vacío. Si S es un subconjunto no vacío de X, definimos el *estabilizador* de S en G por

$$G_S = \{g \in G : g \cdot S = S\}$$

Notación: Si $x \in X$ y $g \in G$, denotaremos $G_x = G_{\{x\}}$, $N(g, G) = N(\{g\}, G)$ y $\mathcal{C}(g, G) = \mathcal{C}(\{g\}, G)$.

Probar que:

(a) G_S, $N(T, G)$ y $\mathcal{C}(T, G)$ son subgrupos de G.

(b) Si $X = G$ y la acción está definida por $g \cdot x = g * x * g^{-1}$ entonces $N(T, G) = G_T$ y $\mathcal{C}(T, G) = \bigcap_{t\in T} G_t = \bigcap_{t\in T} \mathcal{C}(t, G)$ para todo subconjunto T de G.

(c) Si H es un subgrupo de G, $X = \{y * H * y^{-1} : y \in G\}$ y la acción es $g \cdot x = g * x * g^{-1}$ ($g \in G$, $x \in X$) entonces $G_T = N(T, G)$ para todo $T \in X$.

(d) Si $X = H$, con H un subgrupo invariante de G y la acción está definida en la forma $g \cdot h = g * h * g^{-1}$, entonces $G_h = \mathcal{C}(h, G)$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos probar que $\cdot$ es una acción de G en X, y calcular $X^G = \{x \in X : g \cdot x = x \quad \forall g \in G\}$ y las G-órbitas y el estabilizador de cada elemento de X.

(a) $G = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) : d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2\}, \quad X = \mathbb{R}^2, \quad f \cdot x = f(x)$.

(b) $G = \mathbb{R}^*, \qquad X = \mathbb{R}_{>0}, \qquad a \cdot x = x^a$.

(c) $G = SL_2(\mathbb{Z}), \qquad X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot (x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Ejercicio 9. Hallar $N(T, G)$ y $\mathcal{C}(T, G)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $G = S_5, \qquad T = \{(1\ 2), (3\ 4)\}$.

(b) $G = D_4, \qquad T = \{s, s\rho\}$.

Ejercicio 10. Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$ y sea $x = (3, -1)$. Hallar un sistema de generadores minimal de $\mathcal{C}(x, G)$.

Ejercicio 11. Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X. Sean $x \in X$ y $\mathcal{C} = \{gG_x : g \in G\}$. Probar que la aplicación $\psi : \mathcal{C} \to O_x$ definida por $\psi(gG_x) = g \cdot x$ está bien definida y es una biyección. Deducir que $|O_x| = [G : G_x]$ y $|G| = |G_x| \cdot |O_x|$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 12. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G. Sea $G' = H \times K$ con el producto definido por

$$(h, k).(h', k') = (hh', kk'),$$

y sea $X = H.K = \{hk : h \in H, k \in K\}$. Si $(h, k) \in G'$ y $x \in X$, definimos $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$

(a) Probar que $\cdot$ es una acción de G' sobre X, que $G'_1 \simeq H \cap K$ y que $O_1 = H.K$.

(b) Deducir de (a) que $|H||K| = |H.K||H \cap K|$.

Ejercicio 13. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y sea H un subgrupo invariante de G. Determinar una condición necesaria y suficiente para que $\overline{a} \cdot x = a \cdot x$ sea una acción de $G/_H$ en X.

Ejercicio 14. Sea X un conjunto finito. Hallar la cantidad de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

Ejercicio 15. Sea $n \geq 3$ y sea $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ la aplicación definida por

$$\theta(a)(x) = (-1)^a x.$$

(a) Probar que θ está bien definida y que es un morfismo de grupos. Luego, $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre $\mathbb{Z}_n$ por medio de θ.

(b) Hallar G_x para cada $x \in \mathbb{Z}_n$.

Ejercicio 16. Sea G un grupo.

(a) Probar que si $|G| = p^n$, con p primo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$.

(b) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano.

(c) Probar que si $|G| = p^2$, con p primo, entonces G es abeliano.

(d) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

Ejercicio 17. Sea G un grupo. Probar que:

(a) Si H es un subgrupo invariante de G tal que $G/_H$ es abeliano entonces $[G, G] \subseteq H$.

(b) Si G es no abeliano y de orden p^3 (con p primo) entonces $[G, G] = \mathcal{C}(G)$ y $|[G, G]| = p$.

(c) Si $|G| = p^3$ (con p primo) y G posee más de un subgrupo invariante de orden p entonces G es abeliano y no cíclico.

Ejercicio 18. Sea p un primo positivo y sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Probar que G es un grupo no abeliano de orden p^3. Caracterizar $[G, G]$ y $G/_{\mathcal{C}(G)}$.

Ejercicio 19. Sea G un grupo, y sean H y K subgrupos de G.

(a) Probar que si $H \triangleleft G$ o $K \triangleleft G$, entonces $H.K$ es un subgrupo de G. ¿Vale la vuelta?

(b) Probar que si $H \triangleleft G$ y $K \triangleleft G$, entonces $H.K$ es un subgrupo invariante de G. ¿Vale la vuelta?

Ejercicio 20. Sea G un grupo, y sean H y K subgrupos de G. Diremos que $G = H \rtimes K$ si $H \triangleleft G$, $H \cap K = 1$ y $G = H.K$.

Probar que si $G = H \rtimes K$ y $K \triangleleft G$, entonces $h.k = k.h \quad \forall\, h \in H, k \in K$. Deducir que si $G = H \rtimes K$, entonces G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.

Ejercicio 21. Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ grupos y sea $\theta : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ un morfismo de grupos. Sea $G = \{(x, y) : x \in G_1, y \in G_2\}$. Si $(a, b), (c, d) \in G$, definimos

$$(a, b) \cdot_\theta (c, d) = (a *_1 \theta(b)(c), b *_2 d).$$

(a) Probar que $(G, \cdot_\theta)$ es un grupo, que denotaremos por $G_1 \cdot_\theta G_2$.

(b) Probar que $G_1 \cdot_\theta G_2$ es abeliano si y sólo si G_1 y G_2 son abelianos y $\theta(b) = id_{G_1}$ para todo $b \in G_2$.

(c) Caracterizar $\mathbb{Z}_n \cdot_\theta \mathbb{Z}_2$, donde $n \geq 3$ y θ es el morfismo definido en 15.

Ejercicio 22. Sean G_1 y G_2 grupos y sea $\theta : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ un morfismo de grupos. Sea $G = G_1 \cdot_\theta G_2$, y sean

$$H = \{(a, b) \in G : b = 1\}, \qquad K = \{(a, b) \in G : a = 1\}.$$

Probar que H y K son subgrupos de G y que $G = H \rtimes K$.

Ejercicio 23. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $H \triangleleft G$. Sea $\theta : K \to \mathrm{Aut}(H)$ la aplicación definida por $\theta(k)(h) = khk^{-1}$. Probar que

(a) θ está bien definida (es decir, $\theta(k) \in \mathrm{Aut}(H)\, \forall k \in K$).

(b) θ es un morfismo de grupos.

(c) Si $G = H \rtimes K$, entonces $G \simeq H \cdot_\theta K$.

(d) Si $G = H \rtimes K$, entonces son equivalentes:

   I. $K \triangleleft G$.
   II. $\{(a, b) \in H \cdot_\theta K : a = 1\} \triangleleft H \cdot_\theta K$.
   III. $\theta(k) = id_H \quad \forall k \in K$.

iv. $(H \cdot_\theta K, \cdot_\theta) = (H \times K, \cdot)$.

Deducir que si $G = H \rtimes K$ con $K \triangleleft G$, entonces $G \simeq H \times K$.

Ejercicio 24. Sean G, G', H y H' grupos. Probar que si $G \simeq H$ y $G' \simeq H'$, entonces para todo morfismo $\theta : G' \to \mathrm{Aut}(G)$ existe un morfismo $\tau : H' \to \mathrm{Aut}(H)$ tal que $G \cdot_\theta G' \simeq H \cdot_\tau H'$.

Ejercicio 25. Sean H y K grupos y sean θ,$\tau : K \to \mathrm{Aut}(H)$ morfismos. Probar que si existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$ tal que $\theta = \tau \circ \varphi$, entonces $H \cdot_\theta K \simeq H \cdot_\tau K$.

Ejercicio 26. Sean G_1 y G_2 grupos. Probar que $G_1 \times G_2$ es abeliano si y sólo si G_1 y G_2 son abelianos. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza $\times$ por $\cdot_\theta$ con $\theta : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$? (Estudiar ambas implicaciones)

Ejercicio 27.

(a) Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G tales que $H \triangleleft G$.

i. Probar que $G = H \rtimes K$ si y sólo si $|G| = |H|.|K|$ y $H \cap K = \{1\}$.
ii. Deducir que si $|G| = |H|.|K|$ y $(|H|, |K|) = 1$, entonces $G = H \rtimes K$.
iii. Caracterizar todos los grupos de orden 6, 10 y $2p$, con p un primo impar.

(b) Sean p y q primos positivos tales que $p > q$.

i. Probar que si q no divide a $p - 1$, entonces todo grupo de orden pq es cíclico.
ii. Probar que si $q|p - 1$, entonces hay exactamente dos grupos no isomorfos de orden pq: uno cíclico y el otro no abeliano.
iii. Caracterizar todos los grupos de orden p^2 (p primo).
iv. Caracterizar todos los grupos de orden 20.

Ejercicio 28. Determinar si existe un subgrupo K de G tal que $G = H \rtimes K$ en los siguientes casos:

(a) $G = \mathbb{C}^*$, $\quad H = S^1$.

(b) $G = \mathbb{C}$, $\quad H = \mathbb{R}$.

(c) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$, $\quad H = \{(m, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $G = \mathcal{H}$, $\quad H$ un subgrupo no trivial.

(e) G el grupo del ejercicio 3(o) de la práctica 1, $\quad H = \mathcal{C}(G)$.