Práctica 1

Ejercicio 1. Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

(a) Probar que $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

(b) Probar que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface:

$$\forall\, z \in G_n \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que } z = w^k.$$

(c) Probar que

i. $G_n \subseteq G_m$ si y sólo si $n|m$.
ii. $G_n \cap G_m = G_{(n,m)}$.
iii. $G_n \cdot G_m = G_{[n,m]}$.

Ejercicio 2. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

(b) Determinar si S^1 es cíclico.

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano.

(a) $G = \mathbb{N}_0$, $\quad a * b = [a, b]$ si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ y $0 * 0 = 0$.

(b) $G = \mathbb{Q}_{>0}$, $\quad a * b = a \cdot b$.

(c) $G = M_3(\mathbb{Z})$, $\quad a * b = a \cdot b$.

(d) $G = M_n(\mathbb{R})$, $\quad a * b = a + b$.

(e) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) : \det a = 1\}$, $\quad a * b = a \cdot b$.

(f) $G = \mathrm{End}_K(V)$, con V un K-espacio vectorial, $\quad f * g = f \circ g$.

(g) $G = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) : d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}$, $\quad f * g = f \circ g$.

(h) $G = S(X) = \{f : X \to X \,/\, f \text{ es biyectiva}\}$ donde X es un conjunto, $\quad f * g = f \circ g$.
Notación: Cuando $X = \{1, \dots, n\}$, $S(X)$ será notado S_n.

(i) $G = S(\mathbb{Z})$, $\quad f * g = f \circ g^{-1}$.

(j) $G = \mathbb{Z}_n = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < n\}$, $\quad a * b = r_n(a + b)$.

(k) $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, \qquad (a,b) * (c,d) = (r_n(a+c), r_m(b+d))$.

(l) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \,:\, (a,n) = 1\}, \qquad a * b = r_n(a.b)$.

(m) $G = D_n = \{1, s, \rho, s * \rho, \rho^2, s * \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, s * \rho^{n-1}\}$, donde $*$ es una operación asociativa que satisface $\rho^n = 1 = s^2$ y $\rho * s = s * \rho^{n-1}$.

(n) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- = \{\,(a,b) \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\,\}, \qquad (a,b) * (c,d) = (a + (-1)^b c\,,\, b + d)$.

(ñ) $G = G_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n, \qquad * = \cdot$.

(o) $G = (\mathbb{Z}_p)^n = \{\,(a_1, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in \mathbb{Z}_p\,\}$ con p primo, $p > 2$ y n impar,

$$(x * y)_i = \begin{cases} x_i + y_i, & \text{si } i \text{ es impar} \\ x_i + y_i + x_{i-1} \cdot y_n, & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sea S un subconjunto no vacío de G. Probar que

(a) S es un subgrupo de G si y sólo si $x \cdot y^{-1} \in S \quad \forall\, x, y \in S$.

(b) Si G es finito entonces S es un subgrupo de G si y sólo si $x \cdot y \in S \quad \forall\, x, y \in S$.

Ejercicio 5. Probar que H es un subgrupo de $(G, *)$ y determinar si es invariante en cada uno de los siguientes casos:

(a) $G = \mathbb{C}^*, \qquad * = \cdot, \qquad H = S^1$.

(b) $G = D_4, \qquad H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$.

(c) $G = GL_2(\mathbb{C}) \qquad * = \cdot \qquad H = \mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) $G = S^1, \qquad * = \cdot \qquad H = G_n$.

(e) $G = \mathbb{Z}_{2n}, \qquad a * b = r_{2n}(a+b), \qquad H = \{a \in G : a \text{ es par}\}$.

(f) $G = GL_n(\mathbb{R}), \qquad * = \cdot, \qquad H = SL_n(\mathbb{R})$.

(g) $G = S_7, \qquad * = \circ, \qquad H = \{id, (1\;2\;3\;4), (1\;3)(2\;4), (1\;4\;3\;2)\}$.

(h) $G = D_6, \qquad H = \{1, s, \rho^3, s * \rho^3\}$.

(i) $G = \mathbb{Q}, \qquad * = +, \qquad H = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : (m,n) = 1 \text{ y } n = 2^i \cdot 5^j \text{ con } i, j \in \mathbb{N}_0\}$.

(j) $G = \mathbb{Q}, \qquad * = +, \qquad H = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : (m,n) = 1 \text{ y } n \text{ es libre de cuadrados}\}$.

(k) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-, \qquad *$ como en 3(n), $\qquad H = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- : a \equiv b \quad (2)\}$.

Ejercicio 6. Consideremos los siguientes subgrupos de S_4:

$$\begin{aligned} K &= \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}, \\ H &= \{id, (1\ 2)(3\ 4)\}, \\ U &= \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle . \end{aligned}$$

(a) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$.

(b) Probar que H no es invariante en A_4 ni en S_4.

(c) Determinar si $U \triangleleft S_4$.

Ejercicio 7. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

Ejercicio 8.

(a) Hallar $\mathcal{C}(G)$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $G = D_n$.

ii. $G = S_4$.

iii. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

iv. $G = \mathcal{H}$.

v. $G = GL_n(\mathbb{R})$.

vi. $G = SL_n(\mathbb{R})$.

vii. G como en 3(o).

viii. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$.

(b) ¿Es $\mathcal{C}(G)$ un subgrupo invariante de $(G, *)$ para todo grupo $(G, *)$?

Ejercicio 9.

(a) Hallar $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $G = D_n$.

ii. G un grupo libre en n letras.

iii. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

iv. $G = \mathcal{H}$

v. $G = S_n$.

vi. G como en 3(o).

vii. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$.

(b) ¿Es $[G, G]$ un subgrupo invariante de $(G, *)$ para todo grupo $(G, *)$?

Ejercicio 10. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n\mathbb{Z}$.

Ejercicio 11.

(a) Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = G_n$.

(b) Probar que H es un subgrupo de G_n si y sólo si $H = G_d$ para algún d tal que $d \mid n$.

Ejercicio 12.

(a) Encontrar sistemas de generadores "interesantes" para los siguientes grupos:

I. $\mathbb{C}^*$	II. $\mathbb{Z}$	III. D_n
IV. $\mathbb{Z}_n$	V. $\mathcal{U}_{12}$	VI. $\mathbb{Q}^*$
VII. $\mathbb{Q}_{>0}$	VIII. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	IX. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$
X. G como en 3(o)		

¿Cuáles son finitamente generados? ¿Cuáles son cíclicos?

(b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.

(c) Probar que

I. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un sistema de generadores de $GL_2(\mathbb{Z})$.

II. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es un sistema de generadores de $SL_2(\mathbb{Z})$.

(d) Probar que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.

Ejercicio 13. Hallar $\text{ord}(x)$ en los casos

(a) $G = S_8$, $\quad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$; $x = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$; $x = (1\ 2\ 3\ 5)(1\ 3\ 7\ 8)$.

(b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $\quad x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.

(c) $G = \mathcal{H}$, $\quad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

(d) $G = S^1$, $\quad x = e^{\frac{2\pi i}{n}}$; $x = e^{\frac{6\pi i}{n}}$; $x = e^{\frac{5\pi i}{n}}$.

(e) $G = D_4$, $\quad x = \rho^2 * s$; $x = \rho^3$.

(f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

(g) $G = \mathbb{Z}_n$, $\quad x \in \mathbb{Z}_n$ un elemento cualquiera. Deducir que $x \in \mathbb{Z}_n$ es un generador de $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

(h) G como en 3(o), $\quad x \in G$ un elemento cualquiera.

Ejercicio 14. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \text{ con } a \neq 0 \right\}$.

(a) Hallar el orden de G.

(b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

Ejercicio 15. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sean $a, b \in G$.

(a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

i. $x \mapsto a \cdot x$
ii. $x \mapsto a \cdot x \cdot b$
iii. $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$
iv. $x \mapsto x^{-1}$
v. $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

(b) Determinar cuáles de las aplicaciones definidas en a) son morfismos.

(c) Idem (b) en el caso en que G sea abeliano.

Ejercicio 16.

(a) Probar que son equivalentes:

i. G es abeliano.
ii. La aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
iii. La aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

(b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 17.

(a) Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.

(b) Hallar $\mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{Z})$.

(c) Hallar $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

Ejercicio 18. Probar que

(a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq \{0\} \qquad (n > 1)$.

(b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

(c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

(d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ejercicio 19. Determinar si G y K son isomorfos en los casos

(a) $G = \mathbb{Z}_4, \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(b) $G = \mathbb{Z}_n, \qquad K = G_n$.

(c) $G = \mathbb{Z}_{10}, \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.

(d) $G = \mathbb{Q}, \qquad K = \mathbb{R}$.

(e) $G = \mathcal{U}_{16}, \qquad K = \mathcal{H}$.

(f) $G = \mathcal{U}_{16}, \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

(g) $G = S_3, \qquad K = D_3$.

(h) $G = A_4, \qquad K = D_6$.

Ejercicio 20. Hallar todos los subgrupos de $\mathcal{H}$ y caracterizarlos

Ejercicio 21. Consideremos los grupos

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8 \qquad D_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K},$$

donde $\mathcal{K} = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ con $i^2 = j^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$.

Decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

Ejercicio 22. Hallar todos los subgrupos de orden 4 de D_4. ¿Cuáles de ellos son invariantes? ¿Cuáles son isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$? ¿Cuáles son isomorfos a $\mathbb{Z}_4$?

Ejercicio 23. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $H = \{z^2 : z \in G_n\}$. Probar que H es un subgrupo de G_n y caracterizarlo.

Ejercicio 24. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

Ejercicio 25. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4,\ \text{con } (a, 4) = 1 \right\}$.

Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq D_4$?

Ejercicio 26. Sea p un primo y sea $G = SL_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_p) : \det A = 1\}$

(a) Probar que G es un grupo no abeliano de orden $p(p^2 - 1)$.

(b) Caracterizar G en el caso $p = 2$.