

ALGEBRA I - Práctica 2

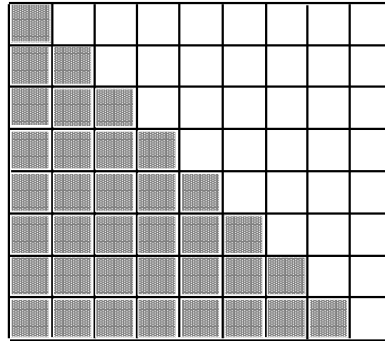
Primer Cuatrimestre - 2008

1. Determinar si $P(1)$ es verdadera y para cuáles $k \in \mathbb{N}$ vale que $P(k)$ implica $P(k + 1)$ en cada uno de los siguientes casos

- i) $P(n) : n \geq n^2$ ii) $P(n) : 2^n + 3^n \leq 5^n$ iii) $P(n) : n \geq 13$
iv) $P(n) : 2^n > n^2$ v) $P(n) : n + 6 = n + 88$ vi) $P(n) : 2^n \geq n^2 + 5$

2. a) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

- i) contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



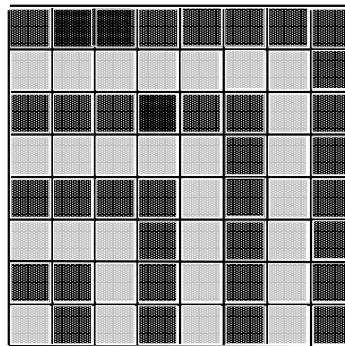
- ii) usando que $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = [1 + n] + [2 + (n - 1)] + [3 + (n - 2)] + \dots$

- iii) usando el principio de inducción

- b) Deducir de a) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

3. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

- i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



- ii) usando el ejercicio 2.

- iii) usando el principio de inducción

4. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

- i) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

- ii) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$
- iii) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \dots + (-144)$
- iv) $1 + 9 + 25 + 49 + \dots + 441$

5. Calcular

i) $\sum_{i=1}^n (4i + 1)$

ii) $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$ de las siguientes dos maneras:

a) usando las propiedades de la sumatoria

b) haciendo el cambio de índices $j = i - 5$ y usando luego la parte b) del ejercicio 2.

iii) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$)

iv) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$)

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ii) $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

iii) $\sum_{i=0}^n \frac{-1}{4i^2 - 1} = \frac{n+1}{2n+1}$

iv) $\sum_{i=1}^n (2i+1) \cdot 3^{i-1} = n \cdot 3^n$

v) $\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

vi) $\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

iii) $3^n \geq n^3$

iv) $\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

$$v) \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$$

$$vi) \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$$

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir que si

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1 \text{ entonces } \sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$. ¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

10. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$i) n! \geq \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$ii) \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

$$iii) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$iv) \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

11. Probar que

$$i) n! \geq 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$ii) 3^n - 2^n > n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$iii) \sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} < 6n - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

$$iv) \binom{2n}{n} > n \cdot 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

12. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ valen

$$i) \text{ la cantidad de diagonales de un polígono de } n \text{ lados es } \frac{n(n-3)}{2}$$

$$ii) \text{ la suma de los ángulos interiores de un polígono de } n \text{ lados es } \pi \cdot (n-2)$$

13. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2n a_n + 2^{n+1} n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n(3n + 1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^2(n - 1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n - 2 \frac{(2n)!}{(n+1)! n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

v) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

15. a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

i) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + (2n + 1)3^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

Sugerencia: usar a) y el ejercicio 6.

c) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^3$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^n i^2$.

Sugerencia: $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$

d) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n!$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^n i \cdot i!$

16. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}} \binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

17. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión (de Fibonacci) definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$

18. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = n a_{n+1} + 2(n+1) a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^n i \cdot a_i \quad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad (n \in \mathbb{N})$

19. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.