1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
No DE LIBRETA:

ÁLGEBRA I - EXAMEN FINAL
(12/08/2008)

1. Probar que $\forall n \geq 4$, $\sum_{i=1}^{n} i! \geq 3 + 10 \cdot 3^{n-3}$.

2. Se tienen m rectas paralelas en el plano y en cada una de ellas se eligen n puntos.
   (a) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos se pueden formar con estos puntos?
   (b) ¿Cuántos de esos subconjuntos contienen como máximo dos puntos en cada recta?

3. (a) Encontrar todos los $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m^2 \equiv 1 \pmod{97}$.
   (b) Probar que para todo $m \in \mathbb{Z}$, m^{48} es congruente a 0, 1 ó 96 módulo 97.

4. (a) Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ no nulos, $h = (f : g)$ su máximo común divisor y $\alpha \in \mathbb{C}$. Probar que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ si y solo si $h(\alpha) = 0$.
   (b) Dado $f \in \mathbb{C}[x]$, probar que $(f : f') = 1$ si y solo si f no tiene raíces múltiples
   (c) Probar que para cualquier $f \in \mathbb{C}[x]$ no nulo, el grado de $(f : (f')^2)$ nunca es igual a 1.

5. ¿Para qué valor de $n \in \mathbb{N}$ los números complejos $z_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}i$ y $z_2 = 2$ son los vértices de un n-ágono regular centrado en $2 - i$? Calcular los otros $n - 2$ vértices.

Justifique debidamente todas sus respuestas