ALGEBRA I - Práctica 4

Primer Cuatrimestre - 2008

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a.b \mid c \Longrightarrow a \mid c$ y $b \mid c$ ii) $4 \mid a^2 \Longrightarrow 2 \mid a$
iii) $2 \mid a.b \Longrightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$ iv) $9 \mid a.b \Longrightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$
v) $a \mid b + c \Longrightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$ vi) $a \mid c$ y $b \mid c \Longrightarrow a.b \mid c$
vii) $a \mid b \Longrightarrow a \leq b$ viii) $a \mid b + a^2 \Longrightarrow a \mid b$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$
ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$
iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$
iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $99 \mid 10^{2n} + 197$ ii) $9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}$
iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$ iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

4. i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$
iii) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$

5. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100

6. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$
ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001, 16347336458092538484431338838650908598417836700330923121811108523893331\
001045081512121181675115579*

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si $n \neq 1$ y $n \mid (n-1)! + 1$ entonces n es primo
ii) si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo
iii) si $2^n + 1$ es primo entonces n es una potencia de 2

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

i) $a = 133, \quad b = -14$ ii) $a = 13, \quad b = 111$
iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$ iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$
v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \ (n \in \mathbb{N})$ vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \ (n \in \mathbb{N})$

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18 ii) la división de a por 3

---

* http://www.rsa.com/rsalabs/node.asp?id=2964

iii) la división de $4a+1$ por 9 iv) la división de a^2+7 por 36
v) la división de $7a^2+12$ por 28 vi) la división de $1-3a$ por 27

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el resto de la división de n^3+4n+5 por n^2+1 sea $n-1$

11. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros. Probar que existen r, s tales que $\sum_{j=0}^{s} a_{r+j}$ es divisible por n
Sugerencia: Considere los n números a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\ldots$, $a_1+a_2+\cdots a_n$ y pruebe que si ninguno de ellos es divisible por n entonces necesariamente dos de ellos tienen el mismo resto en la división por n.

12. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b

i) $a = 2532$, $b = 63$
ii) $a = 5335$, $b = 110$
iii) $a = 131$, $b = 23$
iv) $a = n^2+1$, $b = n+2$ $(n \in \mathbb{N})$

13. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $(a : b)$.

14. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$
Sugerencia: probar que si r es el resto de la división de n por m entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$

15. Sea $a \in \mathbb{Z}$

i) Probar que $(5a+8 : 7a+3) = 1$ o 41
ii) Probar que $(2a^2+3a-1 : 5a+6) = 1$ o 43

16. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$

17. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que si a y b son coprimos entonces $(a : b.c) = (a : c)$
Sugerencia: probar que $(a : b.c)$ y b son coprimos.

18. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p.q \mid a^n$ entonces $p.q \mid a$

19. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a : b) = 1$ entonces $(a^2.b^3 : a+b) = 1$

20. a) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(c.a : c.b) = c.(a : b)$
b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que
i) Si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$
ii) Si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$

iii) Si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$
ii) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19
iii) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34
iv) si $(a : b) = 3$ entonces $(a.b^2 : 9a + 9b) = 27$

22. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que
i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$
ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9
iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14

23. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$

ii) $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2

iii) $2^n.\prod_{i=1}^{n}(2i - 1)$ es divisible por $n!$

iv) $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$

Sugerencia: probar que $(2n + 1)\binom{2n}{n} = (n + 1)\binom{2n+1}{n}$

24. a) Determinar cuántos divisores positivos tiene

i) 9000	ii) $15^4.42^3.56^5$
iii) $10^n.11^{n+1}$	iv) $10^n.8^{n+1}$

b) Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4.5^{123}$ y de $7^{435}.8^{23}$

25. Hallar el menor número natural n tal que $6552.n$ sea un cuadrado.

26. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan

i) $a^2 = 8b^2$	ii) $a^2 = 3b^3$
iii) $7a^2 = 11b^2$	iv) $a^2 = 39b^2$

27. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

28. i) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a $77!$
ii) Calcular la máxima potencia de 9 que divide a $77!$
iii) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a $81!$
iv) Calcular la máxima potencia de 24 que divide a $81!$
v) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 6 de $31!$

29. Calcular $(18^n - 1 : 1292)$, para cada $n \in \mathbb{N}$

30. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$

31. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 2$. Calcular $(a^2 + b^2 : 84)$

32. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$

33. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$

34. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos

35. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $[n : 130] = 260$

36. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[\,a : b\,] = 1500$

37. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$

ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) \neq 1$

38. a) Hallar el desarrollo en base 2 de

i) 1365 ii) 2800 iii) 3.2^{13} iv) $13.2^n + 5.2^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$

b) Hallar el desarrollo en base 7 de 8575

c) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800

d) Sea a un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en n ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos n ceros.