ALGEBRA I - Práctica 1

Primer Cuatrimestre - 2008

Si A es un subconjunto de un conjunto referencial V, denotaremos por A^c al complemento de A respecto de V. Por convención, si x es un número real positivo, $\sqrt{x}$ denota el único número real positivo cuyo cuadrado es x.

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $3 \in A$	ii) $\{1, 2\} \subseteq A$	iii) $\{1, 2\} \in A$
iv) $\{3\} \subseteq A$	v) $\{\{3\}\} \subseteq A$	vi) $\emptyset \in A$
vii) $\{-1, 2\} \subseteq A$	viii) $\emptyset \subseteq A$	ix) $\{1, 2, -1\} \in A$

2. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

i) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\} \quad B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$
ii) $A = \{1, 2, 0, -1, -2\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x + 3| \leq 1\}$
iii) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
iv) $A = \{\emptyset\} \quad B = \emptyset$
v) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 9\}$
vi) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$

3. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3 - 5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$.

4. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ es múltiplo de $15\}$, hallar el complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V \,/\, n \geq 132\}$.

5. Dado el conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ y dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar

i) $A \cap (B \triangle C)$	ii) $(A \triangle B) - C$	iii) $(A - B) \cap C$
iv) $(A \cup B^c) \cap C$	v) $A^c \cap B^c \cap C^c$	vi) $(A - B^c) \triangle C$

6. En un grupo de 110 alumnos hay 63 alumnos que estudian inglés, 30 que estudian alemán y 50 que estudian francés. Sabiendo que hay 7 alumnos que estudian los tres idiomas, 30 que sólo estudian inglés, 13 que sólo estudian alemán y 25 que sólo estudian francés, determinar

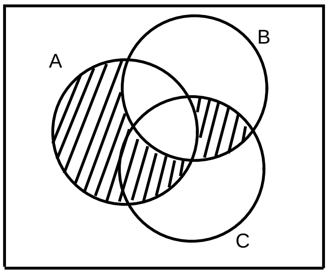
i) ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas?
ii) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y alemán pero no francés?
iii) ¿Cuántos alumnos estudian alemán y francés pero no inglés?
iv) ¿Cuántos alumnos estudian inglés y francés pero no alemán?
v) ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?

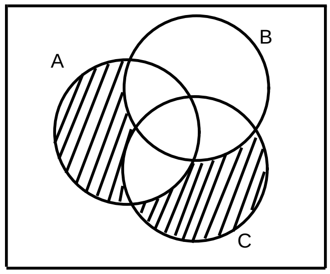
7. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

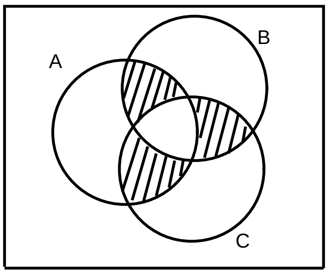
i) $A \cap (B \cup C)$	ii) $A \cup (B \cap C)$	iii) $A^c \cup (B \cap C)$

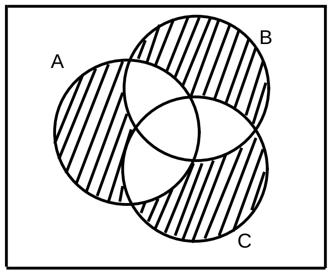
iv) $(A \cup B^c) \cap C$ v) $A \triangle (B \cup C)$ vi) $(A \triangle B) \cap (C - A)$
vii) $A - (B^c \triangle C)$ viii) $A \cup (B \triangle C)$ ix) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i)


ii)


iii)


iv)


9. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A, B y C y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
v) $C \subseteq A \Longrightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$ vi) $A \triangle B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$
vii) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$ xiii) $A \triangle \emptyset = A$

10. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
iii) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
iv) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
v) $A - (A \triangle B) = A \cap B$
vi) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
vii) $A \subseteq B \Longrightarrow A \triangle B = B \cap A^c$
viii) $A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$
ix) $C \subseteq A \Longrightarrow (A \cup B) \cap C^c = (B - C) \cup (A \triangle C)$
x) $A \cap C = \emptyset \Longrightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

11. a) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \emptyset$ ii) $A = \{1\}$ iii) $A = \{a, b\}$

iv) $A = \{1, a, \{-1\}\}$ v) $A = \{1, \{1, 2\}\}$ vi) $A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$

b) ¿Qué relación existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes?

c) Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

12. a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b, c\}$. Hallar $A \times A$, $B \times C$, $(A \cap B) \times C$, $(A \cup B) \times C$ y $(A - B) \times B$

b) Sean X e Y conjuntos. Si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, ¿cuántos elementos tiene $X \times Y$?

c) Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

13. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántas relaciones de A en B hay?

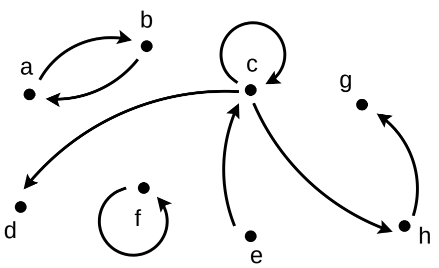
14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (6,4), (4,6), (4,4), (6,6)\}$$

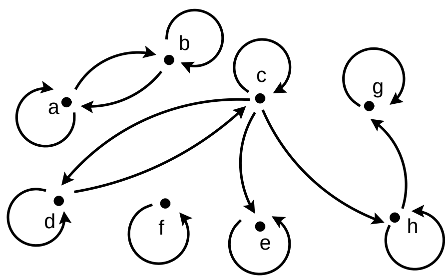
dibujando 6 puntos en el plano que representen cada uno de los elementos de A y una flecha de a a b para cada $(a, b) \in \mathcal{R}$. Viendo el gráfico determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

15. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

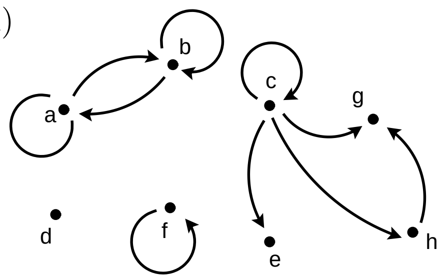
i)



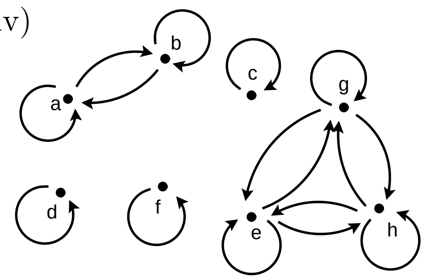
ii)



iii)



iv)



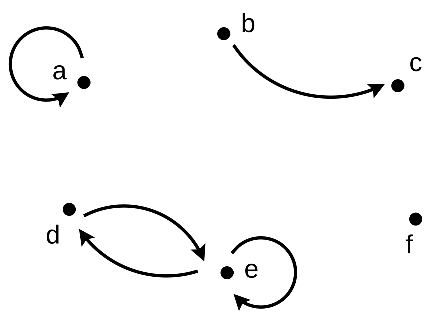
16. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$
v) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es impar}\}$
vi) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$
vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \iff 2 \notin X - Y$
viii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$
ix) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff a + 3b$ es divisible por 4
x) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff b$ es múltiplo de a

17. Dar un ejemplo de una relación en $\mathbb{R}$ que

i) sea simétrica y antisimétrica
ii) no sea ni simétrica ni antisimétrica
iii) sea simétrica y transitiva pero no reflexiva
iv) sea reflexiva y simétrica pero no transitiva
v) sea de equivalencia y de orden

18. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



¿Cuál es la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva
ii) simétrica
iii) transitiva
iv) reflexiva y simétrica
v) simétrica y transitiva
vi) reflexiva y transitiva
vii) de equivalencia

19. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ encuentre una relación de orden $\mathcal{R}$ en A que tenga 12 elementos y que verifique $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(e, a) \in \mathcal{R}$ y $(c, d) \notin \mathcal{R}$. ¿Es única?

20. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

hallar

i) la clase de b
ii) la clase de c
iii) la clase de d
iv) la partición asociada a $\mathcal{R}$

21. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$.

22. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A?

23. a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
iv) i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}$
v) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a = 2b - 3\}$
vi) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$
vii) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \text{ es divisible por } 5\}$
viii) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, b = a^2\}$

b) Para cada una de las relaciones de A en B definidas en a) que sean funciones hallar la imagen y determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

24. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$
ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^3 - 5$
iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$
iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x, x^2, x - 7)$
v) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 6 \\ x + 6 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$
vi) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
vii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
viii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$

ix) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a) = \begin{cases} a+1 & \text{si } a \text{ es par} \\ a-1 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$

25. a) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$g(n,m) = n.(m+1)$$

calcular $(f \circ g)(3,4)$, $(f \circ g)(2,5)$ y $(f \circ g)(3,2)$.

b) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x-1 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g(n) = \sqrt{n}$$

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que

i) $(f \circ g)(n) = 13$

ii) $(f \circ g)(n) = 15$

26. Hallar $f \circ g$ en los casos

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 18$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 3$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^2 - 18$

iii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n-1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = 4n$

iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+5, 3x)$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = \sqrt{n}$

27. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad.

28. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva