Práctica 7: Poliedros, Triangulaciones y Clasificación de Superficies Compactas.

Ejercicio 1. Probar que dos k-símplices euclideanos cualesquiera son homeomorfos vía un homeomorfismo simplicial.

Ejercicio 2. Sean K, L complejos simpliciales euclideanos y $f : K \to L$ homeomorfismo simplicial. Probar que f^{-1} también es simplicial.

Ejercicio 3. Probar que los símplices abiertos $\overset{\circ}{\sigma}$ de símplices maximales de un complejo simplicial euclideano K, son abiertos en K.

Ejercicio 4. Probar que $|id| : |K| \to |K|$ es la identidad y que $|f \circ g| = |f| \circ |g|$. Deducir que isomorfismos entre complejos simpliciales inducen homeomorfismos (simpliciales) entre las realizaciones geométricas.

Ejercicio 5. Probar que el star abierto $\overset{\circ}{st}(\sigma, K)$ es abierto en $|K|$.

Ejercicio 6. Sean $v_0, \ldots, v_k$ vértices de K y sea $\sigma = \{v_0, \ldots, v_k\}$. Probar que σ es simplex en K si y sólo si $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{k} \overset{\circ}{st}(v_i) \neq \varnothing$.

Ejercicio 7. Sea K complejo simplicial y sea $\sigma \in K$. Se define el complemento de σ en K como

$$\sigma^c = K - \{\tau \in K \ / \ \tau \supseteq \sigma\}$$

Probar que σ^c es un subcomplejo de K.

Ejercicio 8. Sea σ un simplex de K. Probar que

(a) $K = st(\sigma) + \sigma^c$.

(b) $st(\sigma) = \overline{\sigma} lk(\sigma)$

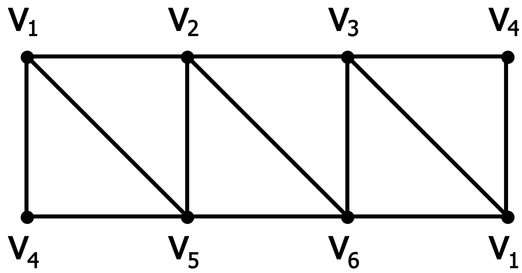
(c) $\dot{\sigma} lk(\sigma) = st(\sigma) \cap \sigma^c$

Ejercicio 9. Dar alguna triangulación del toro.

Ejercicio 10. Sea K un complejo simplicial cuya realización geométrica es (homeomorfa a) una variedad diferenciable de dimensión 1. Probar que K tiene dimensión 1.

Ejercicio 11. Sea $\sigma = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$ un n-simplex euclideano. Se define una orientación *natural* en σ diciendo que $[v_0, \ldots, v_n]$ está orientado si $\det(v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0) > 0$. Probar que esto determina una orientación bien definida.

Ejercicio 12. Probar que la siguiente triangulación de la cinta de Möbius no es orientable.



Ejercicio 13. Sea $|K| \subset \mathbb{R}^n$ un complejo simplicial euclideano de dimensión n. Probar que la orientación natural en cada uno de sus n-símplices induce una orientación en K.

Ejercicio 14. Sea K una triangulación de una variedad diferenciable de dimensión 1. Probar que K es orientable.

Ejercicio 15. Probar que toda subdivisión derivada es una subdivisión estelar.

Ejercicio 16. Sea K complejo simplicial euclideano y K' su subdivisión baricéntrica. Probar que K es orientable si y sólo si K' lo es.

Ejercicio 17. Sea σ un r-simplex euclideano y sea σ' su subdivisión baricéntrica. Probar que para todo $\tau \in \sigma'$ se tiene que

$$diam(\tau) \leq \frac{r}{r+1} diam(\sigma)$$

Sugerencia: Probar primero que $diam(\sigma) = sup\{d(x,y) : x, y \in |\sigma|\} = max\{d(v_i, v_j)\}$.

Ejercicio 18. Sea K complejo simplicial euclideano. Se define

$$mesh(K) = sup\{diam|s| : s \in K\}$$

Probar que si $dim(K) = r$ y K' denota su subdivisión baricéntrica, entonces

$$mesh(K') \leq \frac{r}{r+1} mesh(K)$$

Ejercicio 19. Deducir del ejercicio anterior, que si X es un poliedro euclideano compacto y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento por abiertos de X, entonces existe una triangulación K de X que cumple que para todo $\sigma \in K$, existe un abierto U de $\mathcal{U}$ tal que $|\sigma| \subset U$.

Ejercicio 20. Probar que la característica de Euler de una presentación poligonal es invariante por transformaciones elementales.

Ejercicio 21. Para las siguientes presentaciones, calcular la característica de Euler y aplicar el algoritmo del teorema de clasificación para determinar de qué superficie se trata:

(a) $\langle a, b, c |\ abacb^{-1}c^{-1} \rangle$.

(b) $\langle a, b, c |\ abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$.

(c) $\langle a, b, c, d, e, f |\ abc,\ bde,\ c^{-1}df, e^{-1}fa \rangle$.