

PRÁCTICA 5: SUPERFICIES

Ejercicio 1. Probar que $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ es una inmersión no inyectiva. ¿Quién es f si se identifica $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$?

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x+y, (x+y)^2)$. Mostrar que todo punto de $\mathbb{R}^2$ es un punto crítico de f .

Ejercicio 3. Sea M una superficie regular.

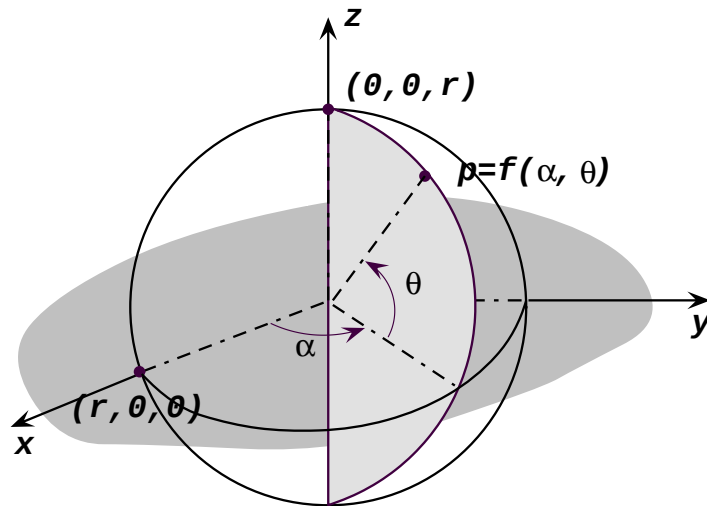
- (a) Probar que si V es un abierto de M y $p \in V$, existe una carta (U, x) de M con $p \in U$ tal que $U \subset V$
- (b) Probar que si V es un abierto no vacío de M , entonces V es una superficie regular.
- (c) Sea (U', f) una parametrización local de M , $V' \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\varphi : V' \rightarrow U'$ un difeomorfismo. Probar que $(V', f \circ \varphi)$ es una parametrización de M .

Ejercicio 4. Verificar que el cono $Q : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no es una superficie regular.

Ejercicio 5. Sea $r > 0$ y $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera con centro en el origen y radio r . Verificar que la función $f : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\alpha, \theta) = (r \cos \alpha \cos \theta, r \sin \alpha \cos \theta, r \sin \theta)$$

es una parametrización de S_r^2 .



$\alpha = \text{longitud}$

$\theta = \text{latitud}$

Ejercicio 6. Proyecciones estereográficas.

Sea S^2 la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Sea $N = (0, 0, 1)$, el polo norte de S^2 . Se consideran las funciones $\varphi : S^2 - N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - N$ dadas por

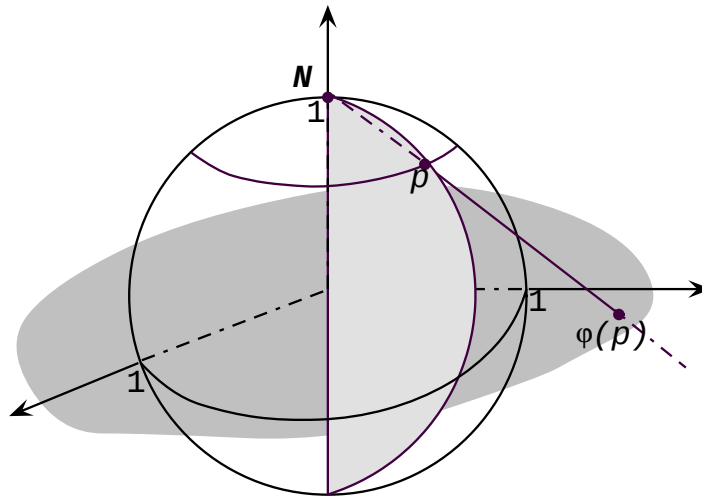
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

y

$$\psi(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

Probar que son diferenciables y que $\psi = \varphi^{-1}$

NOTA: $(S^2 - N, \varphi)$ se llama **proyección estereográfica** desde el polo norte.



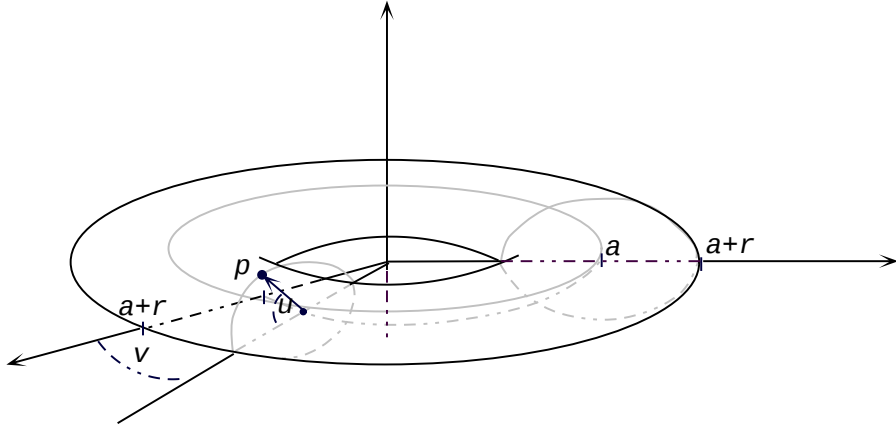
- (b) Enunciar y probar un resultado similar para la proyección estereográfica desde el polo sur $S = (0, 0, -1)$.
- (c) Deducir que ambas proyecciones estereográficas son cartas de S^2 .

Ejercicio 7. Sean $a, r \in \mathbb{R}$ con $a > r > 0$ y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}$$

el toro de radios a, r centrado en el origen. Verificar que

- (a) T es una superficie regular



$$p = ((a+r \cdot \cos(u)) \cos(v), (a+r \cdot \cos(u)) \sin(v), r \cdot \sin(v))$$

(b) $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin v)$$

es una parametrización de T .

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C}$ el semimeridiano de S_r^2 de extremos (incluidos): polo norte $N = (0, 0, r)$ y polo sur $S = (0, 0, -r)$ que pasa por el oeste $O = (r, 0, 0)$.

(a) Comprobar que $S_r^2 - \mathcal{C}$ es un abierto de S_r^2 .

(b) Sea $f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_r^2 - \mathcal{C}$ el homeomorfismo definido por

$$f(\alpha, \theta) = (r \cos \alpha \sin \theta, r \sin \alpha \sin \theta, r \cos \alpha)$$

Mostrar que $(S_r^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ es una carta de S_r^2 .

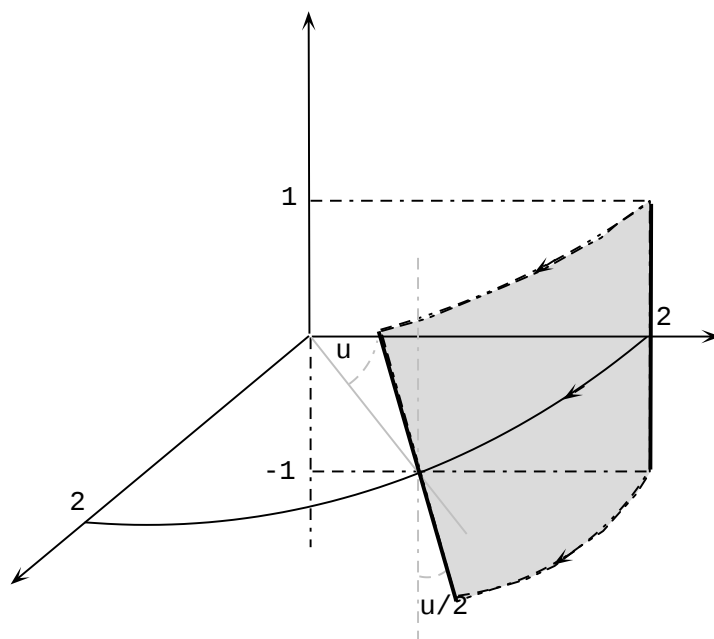
Ejercicio 9. Sea $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ y $f_1, f_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \left(\left[2 + v \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot \sin u, \left[2 + v \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot \cos u, \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \\ f_2(u, v) &= \left(\left[2 + v \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \right] \cdot \cos u, - \left[2 + v \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \right] \cdot \sin u, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Sea $M = f_1(A) \cup f_2(A)$. Probar que M es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

NOTA: M se llama **cinta de Möbius**.

Una forma de obtenerla es hacer rotar el segmento $[(0, 2, -1), (0, 2, 1)]$ en sentido horario alrededor de la circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ de modo que —habiéndose rotado dicho segmento en un ángulo u — éste se incline en un ángulo $\frac{u}{2}$ respecto de la vertical.



Ejercicio 10. Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, $U \subset M$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Verificar que f es continua.

Ejercicio 11. Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$. Mostrar que las funciones $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(p) = \|v - p\|^2$ y $h(p) = \langle p, v \rangle$ son diferenciables.

Ejercicio 12. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $f = (f_1, \dots, f_m)$. Verificar la equivalencia de las afirmaciones:

- (a) f es diferenciable
- (b) $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable para todo $i = 1, \dots, m$.

Ejercicio 13. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $A : S^2 \longrightarrow S^2$ la función antipodal, $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Probar que A es un difeomorfismo.

Ejercicio 14. Probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Ejercicio 15. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío y $f : U \longrightarrow f(U)$ un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^3$. Sea $M \subset U$ una superficie regular.

- (a) Probar que $f(M)$ es una superficie regular
- (b) Probar que $f : M \longrightarrow f(M)$ es un difeomorfismo.

Ejercicio 16. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto y sean $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} / x \in U, y = f(x)\}.$$

Probar que $\text{Graf}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es una variedad diferenciable de dimensión m .

Ejercicio 17. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ y $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es una variedad diferenciable.

Ejercicio 18. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $U \subset M$ un abierto no vacío. Si $p \in U$, verificar que $T_p U = T_p M$.

Ejercicio 19. Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto tal que $M \subset U$. Sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable y $f = g|_M$. Probar que $df_p = dg_p|_{T_p M}$ para todo $p \in M$.

Ejercicio 20. Verificar que si $Q : F(u) = 0$ es una cuádrica en $\mathbb{R}^n$ y si $p \in Q$ es no singular, entonces el hiperplano tangente a Q en p es:

$$T_p(Q) = \{u \in \mathbb{R}^n / \langle \text{grad}(F|_p), u - p \rangle = 0\}$$

¿Qué relación hay entre $T_p(Q)$ y el hiperplano tangente a Q definido para cuádricas?

Ejercicio 21. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n . Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una parametrización local y sea $p = \varphi(q) \in \varphi(U) \subseteq M$. Consideremos la ‘base canónica’ $B = \{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(q)\}$ de $T_p M$. Sea $w \in T_p M$, $w = \alpha'(0)$ con $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ y $\alpha(0) = p$, y sea $\beta = \varphi^{-1}\alpha$. Probar que $[w]_B = \beta'(0)$.

Ejercicio 22. Sean M y N variedades diferenciables y sea $U \subseteq M$ abierto. Sea $f : U \rightarrow N$ diferenciable y sea $p \in U$. Definimos $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ por $d_p f(w) = (f\alpha)'(0)$ (con $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ y $\alpha(0) = p$). Probar que $d_p f$ es lineal y no depende de la elección de α .

Ejercicio 23. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $a \in f(U)$ un valor regular. Sea $p \in S = f^{-1}(a)$. Probar que $T_p(S) = \ker d_p f$.

Ejercicio 24. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión m . Sea

$$TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in M, v \in T_x M\}.$$

(a) Probar que TM es una variedad diferenciable de dimensión $2m$.

(b) Dada $f : M \rightarrow N$ diferenciable, definimos $Tf : TM \rightarrow TN$ por

$$Tf(x, v) = (f(x), d_x f(v)).$$

Probar que Tf es diferenciable.

Ejercicio 25. Sean S^2 la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ y (U, φ) , (V, ψ) las cartas de S^2 dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur.

- (a) Para cada $p \in U \cap V$ hallar las coordenadas de los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial \psi_i}|_p$ ($i = 1, 2$) respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}|_p\}$ de $T_p S^2$.
- (b) Si (W, z) indica la carta dada en el ejercicio ., para cada $p \in U \cap W$ calcular las coordenadas de $\frac{\partial}{\partial z_i}|_p$ ($i = 1, 2$) respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}|_p\}$ de $T_p S^2$.