Práctica 4: Curvas

En esta práctica J denotará un intervalo abierto (a, b) de $\mathbb{R}$, donde eventualmente a y/o b pueden tomar los valores $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.
Además, salvo mención explícita, las curvas parametrizadas seran diferenciables (i.e. C^∞).

Ejercicio 1. Encontrar una curva parametrizada α cuya traza sea la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$ que la recorra en el sentido de las agujas del reloj y tal que $\alpha(0) = (0, 1)$.

Ejercicio 2. Sea α una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, mostrar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

Ejercicio 3. Una curva parametrizada tiene la propiedad que $\alpha''(t) \equiv 0$. ¿Qué se puede decir de α?

Ejercicio 4. Sea $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada y sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Suponiendo que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in J$ y que $\alpha(0)$ también es ortogonal a v, probar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in J$.

Ejercicio 5. Sea $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Mostrar que $\|\alpha(t)\|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in J$.

Ejercicio 6. Sea $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable y sea $[a, b] \subset J$. Para cada partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a, b]$ considere la suma

$$\ell(\alpha, \pi) = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\pi\| = \text{máx}\{t_i - t_{i-1} \ / \ 1 \leq i \leq k\} < \delta$, entonces

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| \ dt \ - \ \ell(\alpha, \pi) \right| < \epsilon$$

Ejercicio 7. Sea $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada y $p, q \in \mathbb{R}^n$. Sea $[a, b] \subset J$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

(a) Mostrar que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| = 1$ se tiene

$$\langle q - p, v \rangle \ = \ \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle \ dt \ \leq \ \int_a^b \|\alpha'(t)\| \ dt$$

(b) Sea $v = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$. Mostrar que

$$\|q-p\| \ \leq \ \int_a^b \|\alpha'(t)\| \ dt$$

i.e., la curva de menor longitud que une p con q es el segmento de recta que los une.

Ejercicio 8. Curvas equivalentes
Sean $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas parametrizadas. Se dice que α y β son *equivalentes* si existe $f : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ diferenciable y estrictamente creciente con $f(c) = a$, $f(d) = b$ tal que $\beta = \alpha \circ f$.
Probar

(a) Si γ_1, γ_2 son dos curvas parametrizadas equivalentes y p es un punto simple sobre su traza, entonces γ_1 y γ_2 tienen la misma dirección en p.

(b) Si γ_1, γ_2 son dos curvas parametrizadas equivalentes, entonces $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

(c) Sean α, β dos curvas parametrizadas equivalentes y sea f como en la definición anterior. Sean $\tilde{\alpha}$ la parametrización natural de α desde t_0 y $\tilde{\beta}$ la parametrización natural de β desde $f^{-1}(t_0)$. Probar que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.

Curvas en el plano

Ejercicio 9. Sea $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Suponiendo que existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $\|\alpha(t)\|$ tiene un máximo en t_0, probar que

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$$

Ejercicio 10.

(a) Sea $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Probar que es localmente inyectiva.

(b) Sea $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1 tal que $c(b) \neq c(a)$. Probar que existe un punto de la curva donde el vector tangente es paralelo a $c(b) - c(a)$.

(c) Sea $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^2 parametrizada por longitud de arco y sea $s_0 \in (a,b)$ tal que $c'(s_0) \neq 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $s_1, s_2, s_3 \in (s_0-\delta, s_0+\delta)$ son todos distintos, entonces los puntos $c(s_1)$, $c(s_2)$, $c(s_3)$ no están alineados.

Ejercicio 11. Sea $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^2 tal que existe $t_0 \in (a,b)$ con $c'(t_0), c''(t_0) \neq 0$, $\langle c'(t_0), c''(t_0) \rangle = 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $t_1, t_2 \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$, entonces el conjunto $\{c'(t_1), c''(t_2)\}$ es linealmente independiente.

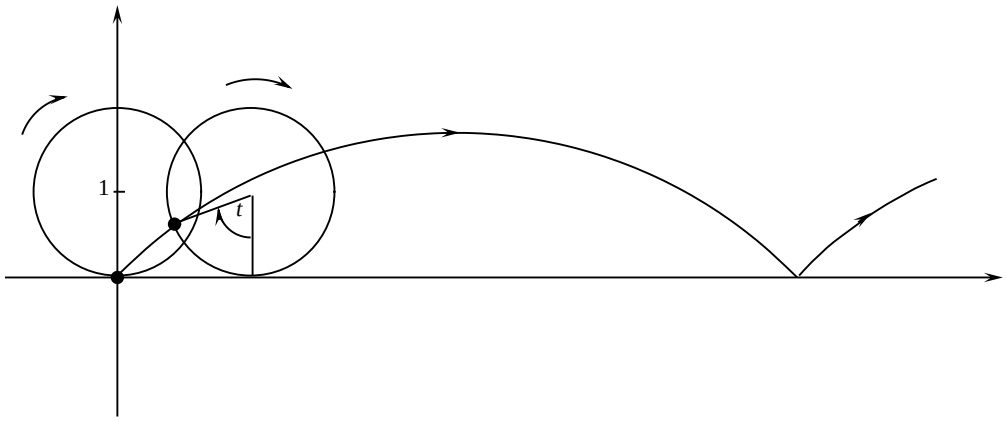
Ejercicio 12. Sea $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Probar que

$$\kappa(s) = \det \begin{pmatrix} c_1'(s) & c_1''(s) \\ c_2'(s) & c_2''(s) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular tal que $|\kappa(s)| = r$ para todo $s \in [a, b]$. ¿Qué puede decirse de la traza de c? Analizar el comportamiento de c en los casos $\kappa > 0$ y $\kappa < 0$.

Ejercicio 14. Probar que si todas las rectas normales a una curva pasan por un punto fijo, entonces la traza está contenida en una circunferencia.

Ejercicio 15. Cicloide
Un disco circular de radio 1 se mueve a lo largo del eje x. La figura descripta por un punto de la circunferencia del disco se llama *cicloide*



(a) Obtener una curva parametrizada cuya traza sea la cicloide y determinar sus puntos singulares.

(b) Calcular la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

Ejercicio 16. Figura Ocho.
Sea $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\text{sen}(t), \text{sen}(t)\cos(t))$.

(a) Dibujar α e identificar varios puntos.

(b) Hacer un buen gráfico cualitativo de la función curvatura.

Curvas en el espacio

Ejercicio 17. Probar que si $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es plana, su plano osculador en cada punto es el plano que la contiene.

Ejercicio 18. Probar que la fórmula de la torsión de una curva con una parametrización arbitraria es:

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'' \, , c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$$

Ejercicio 19.

(a) Caracterizar las curvas parametrizadas por longitud de arco con curvatura nula.

(b) Idem para el caso de torsión nula.

(c) Caracterizar las curvas parametrizadas por longitud de arco tales que $\tau \equiv 0$ y κ es constante. ¿Se obtiene el mismo resultado sin pedir $\tau \equiv 0$?

Sugerencia: considerar la hélice circular $c(u) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\, u, bu)$.

Ejercicio 20. Hallar la curvatura y la torsión de las siguientes curvas

(a) $\alpha(u) = (u, u^2, u^3)$

(b) $\alpha(u) = (u, \frac{u+1}{u}, \frac{1-u^2}{u})$

(c) $\alpha(u) = (a(u - \mathrm{sen}\, u), a(1 - \cos u), bu)$

Ejercicio 21.

(a) Demostrar que si todas las rectas tangentes a una curva regular pasan por un punto fijo, entonces la curva es una recta.

(b) Idem si todas esas rectas tangentes son paralelas a una recta dada.

Ejercicio 22.

(a) Probar que si los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es plana.

(b) Idem si todos son paralelos a un plano dado.

Ejercicio 23. Suponiendo que $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in J$, mostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\alpha(J)$ esté contenido en una esfera es que

$$R^2 + R'^2 T^2 = \text{ constante}$$

donde $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$ y $R' = \frac{dR}{ds}$.

Ejercicio 24. Mostrar que si $\tau(s) \neq 0$ para todo s, para una cierta curva α, entonces $B(s)$ determina la curvatura $\kappa(s)$ y $|\tau(s)|$ de esa curva.

Ejercicio 25. Mostrar que si $\tau(s) \neq 0$ para todo s, para una cierta curva α, entonces $N(s)$ determina la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de esa curva.

Ejercicio 26. Mostrar que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ de una curva regular $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la curvatura en t de la curva plana $\pi \circ \alpha$, donde π es la proyección ortogonal de α sobre el plano osculador en t.