Práctica 2: Cuádricas.

Ejercicio 1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática cuya expresión en la base canónica es

$$F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - 10$$

(a) Hallar su expresión respecto de la base $\mathbf{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

(b) Hallar una base $\mathbf{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que en la expresión de F en $\mathbf{B}'$ no haya términos del tipo ax_ix_j con $i \neq j$ y $a \neq 0$.

(c) Encontrar $A \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \psi_A + 2\varphi_A$.

Ejercicio 2. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática. Probar que son equivalentes:

(a) F es reducible en $\mathbb{V}$

(b) F es reducible en $\mathbb{V}_A$, para todo $A \in \mathbb{V}$

(c) F es reducible en $\mathbb{V}_A$, para algún $A \in \mathbb{V}$.

Ejercicio 3. Encontrar el centro de cada una de las siguientes cuádricas.

(a) $Q : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)

(b) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

(c) $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

(d) $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_3 - 7 = 0$ (en $\mathbb{R}^4$)

Ejercicio 4. Determinar los puntos singulares de cada una de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$.

(a) $Q : x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

(b) $Q : 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 3)$

(c) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 = 0$ $(n = 4)$

(d) $Q : x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ $(n = 5)$

Ejercicio 5. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$Q : x_1^2 + (a^2+3)x_2^2 + (a^2-3)x_3^2 + (2a+4)x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

tiene centro único.

Ejercicio 6.

(a) ¿Es posible encontrar una cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$ tal que $Q_C : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ y cuyo único punto singular es $(1, 0, -1)$?

(b) Caracterizar las cuádricas tales que todos sus puntos son singulares.

Ejercicio 7.

(a) Sea $Q : F(x) = 0$ una cuádrica y $A \in Q$ no singular. Mostrar que

$$T_A : \phi(A, x) + \varphi(x) + \varphi(A) + c = 0$$

si $F(x) = \phi(x, x) + 2\varphi(x) + c$.

(b) Verificar que si Q es una parábola de $\mathbb{R}^2$, entonces para cada $A \in Q$, T_A es la recta tangente (i.e., la única recta no paralela al eje que corta a Q en un sólo punto.)

Ejercicio 8. Hallar la ecuación del hiperplano tangente a las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$ en los puntos indicados:

(a) $Q : 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ $\quad P = (1, 0)$

(b) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 - 10 = 0$ $\quad P = (-2, 0)$

(c) $Q : 3x_1^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ $\quad P = (1, 0, 0)$

(d) $Q : 6x_1x_2 - 4x_1 + 9x_2 - 6 = 0$ $\quad P = (-\frac{3}{2}, 0, 0)$

Ejercicio 9. Hiperplano Polar
Dado $B \in \mathbb{V}$ tal que no es centro de la cuádrica Q, se llama *hiperplano polar de B respecto de Q* a

$$P_B : \varphi_B(x) + c_B = 0$$

si $Q : \psi + 2\varphi + c = 0$.

(a) ¿Para qué se pide que B no sea centro de Q?

(b) Mostrar que la ecuación de P_B puede escribirse en la forma:

$$\phi(B, x) + \varphi(x) + \varphi(B) + c = 0$$

(c) ¿Qué relación hay entre P_A y T_A cuando $A \in Q - Q_S$?

(d) Dados $A \in Q - Q_S$ y $B \in \mathbb{V} - Q_C$, verificar que

$$B \in T_A \iff A \in P_B$$

(e) Calcular P_B para $Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0$ y $B = (-1, 4)$. Graficar.

Ejercicio 10.

(a) Hallar las tangentes a la cónica $Q : 3x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ que pasan por $P = (1, 1)$

(b) Determinar todos los puntos P de la cónica $Q : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ tales que la tangente en P sea paralela a la recta $L : x_1 + x_2 = 3$.

Ejercicio 11. Sean H_1, H_2 dos hiperplanos (afines) en $\mathbb{V}$ y $Q = H_1 \cup H_2$. Sea Q_S el conjunto de puntos singulares de Q. Probar que $Q_S = H_1 \cap H_2$.

Ejercicio 12. Determinar la ecuación normal afín de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$, indicando en cada caso

- ▷ sistema de coordenadas afines utilizado
- ▷ rango e índice
- ▷ gráfico aproximado

(a) $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$ $\quad (n = 4)$

(b) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ $\quad (n = 3)$

(c) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5 = 0$ $\quad (n = 3)$

(d) $x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ $\quad (n = 2)$

(e) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$ $\quad (n = 2)$

Ejercicio 13.

(a) Dada la cónica de ecuación $Q : (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = 1$, hallar un sistema de coordenadas afines que exprese a Q en su forma normal afín.

(b) Idem con $Q : 9(x_1 - a)^2 - 4(x_2 - b)^2 = 1$

Ejercicio 14. Probar que la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$

$$F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3$$

es reducible.

Ejercicio 15. Determinar los valores de α y β ($\alpha > 0$) para los cuales la forma cuadrática de $\mathbb{R}^2$

$$F(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2$$

es reducible.

Ejercicio 16. Dada la cónica Q de $\mathbb{R}^2$ de ecuación : $3x_1^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$, hallar

(a) el cono de tangentes de Q desde $A = (1, 1)$

(b) las rectas tangentes a Q que pasan por A.

Ejercicio 17. Sean Q y Q' las cónicas de $\mathbb{R}^2$ definidas por las ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} Q & : & 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ Q' & : & 5y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 2y_1 + 4y_2 - 1 = 0 \end{array}$$

Encontrar un isomorfismo afín f tal que $f(Q) = Q'$.

Ejercicio 18. Definir isomorfismos afines en $\mathbb{R}^3$ que lleven cada una de las cuádricas del ejercicio 13 a la forma normal afín.

Ejercicio 19. Sean $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y Q la cuádrica definida por $Q : \psi(x) - c = 0$. Sea Q_S el conjunto de puntos singulares de Q. Probar que

$$Q_S \neq \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 0$$

Ejercicio 20. Probar que si una cuádrica contiene un hiperplano de puntos singulares, la cuádrica coincide con el hiperplano.

Ejercicio 21. Hallar todos los $P \in \mathbb{R}^2$ por los cuales pasan dos tangentes a la cónica $Q : x_1x_2 - 1 = 0$.