Práctica 1: Geometría Afín y Métrica. Formas Bilineales y Cuadráticas.

Ejercicio 1. Sistema de coordenadas afines.
Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto $S = \{A, \{v_1, \ldots, v_n\}\}$ se denomina *sistema de coordenadas afines* en $\mathbb{V}$ si $A \in \mathbb{V}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}_A$. Notaremos $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$. Mostrar que son equivalentes:

(a) $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de coordenadas afines en $\mathbb{V}$.

(b) $\{v_1 - A, \ldots, v_n - A\}$ es base de $\mathbb{V}$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n y sea $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema de coordenadas afines en $\mathbb{V}$. Dado $v \in \mathbb{V}$, notaremos con $[v]_S$ al vector de coordenadas de v respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}_A$; i.e., $[v]_S = (a_1, \ldots, a_n)$ si $v = \sum_{i=1}^{n} {}_{\mathrm{A}} a_i \underset{A}{\cdot} v_i$.

El vector $[v]_S$ se denomina *vector de coordenadas afines de v respecto de S*.

(a) Hallar $[v]_S$ en los siguientes casos:

- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2,1,0); (0,1,0), (2,0,1), (0,0,-3)\}$, $v = (0,0,0)$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{X^2; X+1, X^2+3X, X^2+2\}$, $v = 2X$
- $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $S = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

(b) Sea $S = \{(0,-2,1); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Si $[v]_S = (-2,0,4)$, calcular v.

Ejercicio 3. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sean $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$, $T = \{B; w_1, \ldots, w_n\}$ dos sistemas de coordenadas afines en $\mathbb{V}$. Sea $C = (C_{ij})_{i,j}$ la matriz de cambio de la base $\{v_1 - A, \ldots, v_n - A\}$ en la base $\{w_1 - B, \ldots, w_n - B\}$; es decir, $v_j - A = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(w_i - B)$.

(a) Probar que para cada $v \in \mathbb{V}$, $[v]_T^t = C[v]_S^t + [A]_T^t$.

(b) Definimos $\tau_{AB} : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}_B$ por $\tau_{AB}(v) = v - A + B$. Probar que τ_{AB} es un isomorfismo lineal.

(c) Probar que $\|\tau_{AB}\|_{\mathbf{B}_A \mathbf{B}_B} = C$, donde $\mathbf{B}_A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathbf{B}_B = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Ejercicio 4. Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ está en *posición general* si todo subconjunto $A \subseteq S$ de cardinal menor o igual a $n+1$ es afinmente independiente.
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto infinito $S = \{(t, t^2, t^3, \ldots, t^n) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ está en posición general en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 5. Variedades lineales
Un subconjunto no vacío M de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice *variedad lineal* si existe $A \in \mathbb{V}$ tal que M es subespacio de $\mathbb{V}_A$. Probar que para $M \subseteq \mathbb{V}$, $M \neq \varnothing$, son equivalentes:

(a) M es variedad lineal

(b) M es subespacio de $\mathbb{V}_B$ para todo $B \in M$

(c) $M -_C A$ es subespacio de $\mathbb{V}_C$ para todo $A \in M$ y todo $C \in \mathbb{V}$

(d) $M - A$ es subespacio de $\mathbb{V}$ para todo $A \in M$

(e) $M - A$ es subespacio de $\mathbb{V}$ para algún $A \in M$

(f) Existen $A \in \mathbb{V}$ y $\mathbb{S}$ subespacio de $\mathbb{V}$ tales que $M = A + \mathbb{S}$

NOTA: $\mathbb{S}$ se llama *subespacio paralelo* a M.

Ejercicio 6. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{V}$. Probar que el conjunto

$$M = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \Big/ x \in M_1 \ , \ y \in M_2 \right\}$$

es una variedad lineal. Dar condiciones suficientes para que $M_1 \subseteq M$ y $M_2 \subseteq M$.

Ejercicio 7. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, $\dim \mathbb{V} = n$ y M una variedad lineal de $\mathbb{V}$ de dimensión r. Si $m = n - r$, sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = m$. Probar que existe un sistema de coordenadas afines $S = \{B; w_1, \ldots, w_n\}$ con la propiedad que

$$M = \left\{ w = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{B}{\cdot} w_i \Big/ A. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}$$

Ejercicio 8. Independencia afín
Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{V}$. Demostrar que son equivalentes:

(a) $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es afinmente independiente.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ con $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

(c) $\{v_1 - v_j, \ldots, \widehat{v_j - v_j}, \ldots, v_m - v_j\}$[1] es linealmente independiente para todo $j \leq m$.

(d) $\{v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{V}_{v_j}$ para todo $j \leq m$.

Ejercicio 9. Hallar un conjunto de generadores afinmente independientes de las variedades lineales

(a) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 = 3 \ , \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$

(b) $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2\}$

[1] $\widehat{v_k}$ significa que se excluye el elemento v_k

(c) M generada por $A = (-1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ y $D = (-2, -3, -3)$.

Ejercicio 10. Conjuntos Convexos.
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión finita). Dados $v \neq w \in V$, se define el *segmento de extremos v y w* como el subconjunto

$$vw = \{tv + (1-t)w,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

Un subconjunto $C \subseteq V$ se dice *convexo* si para todo $v \neq w \in C$ se tiene que $vw \subseteq C$. Probar que

(a) Los conjuntos convexos son cerrados por combinaciones convexas, es decir: dados $v_1, \ldots, v_r \in C$ y escalares $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum \lambda_i = 1$, se tiene que $\sum \lambda_i v_i \in C$.

(b) La intersección arbitraria de convexos es un conjunto convexo.

(c) Si A y B son convexos entonces $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$ es convexo. De la misma forma $A - B$ y λA (para $\lambda \in \mathbb{R}$) son también convexos.

(d) Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces la clausura de C, cl C, y el interior de C, int$C$, son también convexos.

(e) Si $f : V \to V$ es una transformación afín y $C \subseteq V$ es convexo, $f(C)$ también lo es.

(f) Caracterizar todos los subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ tales que A y su complemento son convexos. Idem para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

(g) Se define la *cápsula convexa* de un conjunto $A \subseteq V$ como el menor convexo de V que contiene a A. Probar que la cápsula convexa de A es la intersección de todos los convexos que contienen a A y que se puede caracterizar también como el conjunto de combinaciones convexas de elementos de A.

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes casos, estudiar si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas.

(a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 - x_2 = 3\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \lambda(1, -1) + (2, 1)\}$

(b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = a(1, 0, 1) + (0, 0, -3)\}$

(c) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = 1 \ , \ x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = 0 \ , \ x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$

(d) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \ , \ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \ , \ 2x_1 - x_3 - x_4 = 2\}$

Ejercicio 12. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim M_1 = s \leq t = \dim M_2$. Probar que si $M_1 \parallel M_2$, entonces $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ o $M_1 \subseteq M_2$.

Ejercicio 13. Teorema de Thales.
Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos contenidos en un plano π tal que no hay tres de ellos contenidos en una recta y las rectas L_{AC} y L_{BD} son paralelas.

(a) Si $L_{AB} \cap L_{DC} = \{P\}$ y $P = \lambda.B + (1-\lambda)A = \gamma.D + (1-\gamma)C$, probar que $\lambda = \gamma$

(b) Si $L_{AB} \parallel L_{DC}$, sean $P \in L_{AB}$ y $Q \in L_{DC}$ tales que $L_{PQ} \parallel L_{AC}$. Si $P = \lambda.B + (1-\lambda)A$ y $Q = \gamma.D + (1-\gamma)C$, probar que $\lambda = \gamma$.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ una transformación afín, $A \in \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V}_A \longrightarrow \mathbb{V}_A$ dada por $g(v) = f(v) \underset{A}{-} f(A)$. Probar que g es lineal.

Ejercicio 15. Probar que $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ es una transformación afín si y sólo si existen $A \in \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ lineal tales que $f(x) = g(x) + A$.
Deducir que f es isomorfismo afín si y sólo si g es isomorfismo.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface $f(\lambda \underset{x}{\cdot} y) = \lambda \underset{f(x)}{\cdot} f(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es una transformación afín.

Ejercicio 17. Encontrar todas las transformaciones afines $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que

(I) $f(-2, 0, 1) = (-2, 0, 1)$

(II) $f(L) \parallel L$ para toda recta L de $\mathbb{R}^3$.

Producto interno. Distancia entre variedades lineales.

Ejercicio 18. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Si $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$, se define el *determinante de Gramm* o *Grammiano* de $v_1, \ldots, v_m$ como el número

$$G(v_1, \ldots, v_m) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$$

(a) Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión m y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal de S. Si $v_1, \ldots, v_m \in S$ y $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$ $(1 \leq j \leq m)$, verificar que $G(v_1, \ldots v_m) = (\det A)^2$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

(b) Deducir de (a) que los vectores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ son linealmente independientes si y sólo si $G(v_1, \ldots, v_m) > 0$.

(c) Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ de dimensión m y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de S. Verificar que si $x \in \mathbb{V}$, entonces

$$d(x, S) = \left(\frac{G(x, v_1, \ldots, v_m)}{G(v_1, \ldots, v_m)} \right)^{1/2}$$

Ejercicio 19. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ linealmente independientes. El *paralelepípedo m-dimensional generado por* $v_1, \ldots, v_m$ se define como el conjunto

$$P(v_1, \ldots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \ \Big/\ 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

El volumen de $P(v_1, \ldots, v_m)$ se define inductivamente del siguiente modo

(I) si $m = 1$, $\mathrm{vol}(P(v_1)) = |v_1|$

(II) $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_m)) = \mathrm{vol}(P(v_2, \ldots, v_m)).d(v_1, S)$ siendo $S = \langle v_2, \ldots, v_m \rangle$.
Probar que $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_m)) = G(v_1, \ldots, v_m)^{1/2}$.

Ejercicio 20. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{O}(n)$ tal que $f(M_1) = M_2$. Sean $p_1 \in M_1$ y $p_2 \in M_2$ tales que $d(0, M_1) = d(0, p_1)$ y $d(0, M_2) = d(0, p_2)$. Probar que $f(p_1) = p_2$.

Ejercicio 21. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ de la misma dimensión. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones.

(a) Existe una rotación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(M_1) = M_2$.

(b) $d(0, M_1) = d(0, M_2)$.

Ejercicio 22. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones.

(a) $\dim M_1 = \dim M_2$.

(b) Existe una isometría $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = Ax^t + b$ con $A \in \mathcal{O}(n)$ tal que $\det A = 1$ y $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 23. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos $\pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3\}$, $\pi_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3\}$ y sean $L_1 \subseteq \pi_1$, $L_2 \subseteq \pi_2$ las rectas $L_1 = \{\big(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}, 0\big) + t(1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{\big(0, -\frac{13}{3}, \frac{2}{3}\big) + t(1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.
Construir $f \in \mathcal{O}(3)$ tal que $f(\pi_1) = \pi_2$, $f(L_1) = L_2$ y $\det(f) = 1$. ¿Es única?

Ejercicio 24. Sean, en $\mathbb{R}^3$, π el plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ y L la recta definida por

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - 2x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Determinar una recta $L' \subset \pi$ tal que $d(L, L') = 3$.

Ejercicio 25. Calcular $d(M_1, M_2)$ en los siguientes casos:

(a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3\}$

(b) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 = 1 \ , \ x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_3 = 1\}$

(c) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \alpha(1,-1,0) + \beta(2,1,1) + (1,0,0)\}$
$M_2 = \{(3,0,1)\}$

(d) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \ , \ x_2 - 2x_4 = 2\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_2 - 2x_4 = -8 \ , \ x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Formas bilineales.

Ejercicio 26. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal. Se definen,

$$\begin{array}{lll} L_\phi & : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^* & \text{por} \quad L_\phi(v)(w) = \phi(v,w) \\ R_\phi & : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^* & \text{por} \quad R_\phi(v)(w) = \phi(w,v) \end{array}$$

(a) Probar que L_ϕ y R_ϕ son transformaciones lineales. ¿Cuál es la relación entre ambas cuando ϕ es simétrica?

(b) Dada $\mathbf{B}$ base de $\mathbb{V}$, calcular $\|L_\phi\|_{\mathbf{B}\mathbf{B}^*}$ y $\|R_\phi\|_{\mathbf{B}\mathbf{B}^*}$ y verificar que una es la transpuesta de la otra.

(c) Dada $\mathbf{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, base de $\mathbb{V}$, se define la matriz de ϕ en la base $\mathbf{B}$ por

$$M_{\mathbf{B}} = (\phi(v_i, v_j))_{i,j}$$

Mostrar que si $\mathbf{B}'$ es otra base de $\mathbb{V}$, entonces $M_{\mathbf{B}'}(\phi) = C(\mathbf{B}', \mathbf{B})^t \ . \ M_{\mathbf{B}}(\phi) \ . \ C(\mathbf{B}', \mathbf{B})$ y deducir que $M_{\mathbf{B}}(\phi)$ es simétrica si y sólo si $M_{\mathbf{B}'}(\phi)$ lo es.

(d) Verificar que $\det(M_{\mathbf{B}}(\phi))$ y $\det(M_{\mathbf{B}'}(\phi))$ tienen el mismo signo.

(e) Probar que ϕ es simétrica si y sólo si $M_{\mathbf{B}}(\phi)$ lo es para toda base $\mathbf{B}$.

(f) ¿Existe $\mathbf{B}$, base de $\mathbb{R}^2$, tal que $M_{\mathbf{B}}(\phi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ si $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal dada por

$$\phi(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1?$$

(g) Verificar que si ϕ es simétrica entonces $\ker(\phi) = \ker(L_\phi) = \ker(R_\phi)$. Deducir que L_ϕ es isomorfismo si y sólo si $\ker(\phi) = 0$.

(h) Verificar que si ϕ es simétrica entonces $\|L_\phi\|_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = M_{\mathbf{B}}(\phi)$ para toda base $\mathbf{B}$.

Ejercicio 27. Sea ϕ una forma bilineal simétrica en $\mathbb{V}$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones.

(a) $\ker(\phi) = 0$.

(b) Para toda $\varphi \in \mathbb{V}^*$ existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $\varphi(x) = \phi(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

Ejercicio 28. Sean

$$\begin{array}{ll} \mathcal{BS}(\mathbb{V}) & = \{\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \phi \text{ es bilineal y simétrica}\} \\ \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) & = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ / \ A = A^t\} \end{array}$$

Probar que para cada base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{V}$, la aplicación $M_{\mathbf{B}} : \mathcal{BS}(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ dada por "$\phi \mapsto M_B(\phi) =$ matriz de ϕ en $\mathbf{B}$" es un isomorfismo.
¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{BS}(\mathbb{V})$?

Ejercicio 29. Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{R}^n)$. Probar que existe una única $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica, tal que $\phi(x, y) = xAy^t$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 30. Hallar en cada caso el hiperplano polar H_v de v respecto de ϕ

(a) $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \phi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \quad v = (1, 0)$

(b) $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \phi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \ , \ v = (1, -2, 3)$

Ejercicio 31. Para cada una de las siguientes formas bilineales simétricas, hallar la descomposición de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}^+$, $\mathbb{V}^-$ y $\mathbb{V}^0$ y calcular el índice, el rango y la dimensión del núcleo

$$\begin{array}{llcl} (a) & \phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \phi(x, y) & = & 3x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2 \\ (b) & \phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \phi(x, y) & = & 2x_2y_1 + 3x_3y_1 + x_4y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2 + 5x_4y_2 \\ & & & +3x_1y_3 + 4x_3y_3 - 5x_4y_3 + x_1y_4 + 5x_2y_4 \\ & & & -x_3y_4 - 3x_4y_4 \\ (c) & \phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \phi(x, y) & = & x_1y_1 + x_3y_1 - 3x_2y_2 + 3x_3y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_3 \\ & & & -2x_3y_3 \end{array}$$

Ejercicio 32. Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal.

(a) Probar que si $\phi_f : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\phi_f(u, v) = \phi(f(u), f(v))$ entonces, $f^{-1}(\ker(\phi)) \subseteq \ker(\phi_f)$.

(b) Probar que si f es isomorfismo, entonces $\ker(\phi_f) = f^{-1}(\ker(\phi))$.

(c) Probar que si f es isomorfismo, entonces $M_B(\phi_f) = M_{f(B)}(\phi)$.

(d) Probar que si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ y f es isomorfismo, entonces

$$M_B(\phi_f) = \|f\|_B^t \ . \ M_B(\phi) \ . \ \|f\|_B$$

Deducir que $\det(M_B(\phi_f))$ y $\det(M_B(\phi))$ tienen el mismo signo.

Ejercicio 33. Sea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio no nulo y ϕ una forma bilineal simétrica en $\mathbb{V}$.

(a) Probar que si $\phi_{\mathbb{S}} = \phi|_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}$ es no degenerada, entonces $\mathbb{S} \cap \ker\phi = 0$.

(b) Encontrar dos subespacios $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ de $\mathbb{R}^3$ –de dimensión máxima– con la propiedad que cada $\phi_{\mathbb{S}_i}$ es no degenerada, siendo:

$$M_E(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Probar que $\mathbb{S}$ es un subespacio de dimensión máxima con la propiedad que $\phi_{\mathbb{S}}$ es no degenerada si y sólo si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \ker\phi$.

Ejercicio 34.

(a) Encontrar una ecuación del hiperplano polar de $(1, 0, -1)$ respecto de la forma bilineal ϕ dada por

$$\phi(x, y) = 4x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

(b) Encontrar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sea la ecuación del hiperplano polar de v respecto de la forma ϕ dada en (a).

(c) Encontrar una forma bilineal simétrica ϕ en $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sea la ecuación del hiperplano polar de $(0, 1, -1)$.

Ejercicio 35. Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{R}^{2n+1})$ no degenerada y tal que índ(ϕ) es impar. Probar que para toda base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ es $\det(M_{\mathbf{B}}(\phi)) > 0$.

Ejercicio 36. Desigualdad de Schwartz.
Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{V})$ semidefinida y sea ψ su forma cuadrática asociada. Probar que

$$|\phi(x, y)|^2 \leq \psi(x)\psi(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

Ejercicio 37. Hallar en cada caso el cono asociado a la forma cuadrática.

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \quad , \quad \psi(x) = x_1^2$

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 - x_2^2$

¿En alguno de estos casos coincide con el núcleo de la forma bilineal asociada?

Ejercicio 38. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y ϕ la forma bilineal asociada. Se definen:

$$\psi_A = \psi \circ \tau_A^{-1} \qquad \text{y} \qquad \phi_A = \phi \circ (\tau_A^{-1} \times \tau_A^{-1})$$

(a) Mostrar que $\mathrm{rg}(\psi_A) = \mathrm{rg}(\psi)$ e $\text{índ}(\psi_A) = \text{índ}(\psi)$

(b) Mostrar que $\ker(\phi_A) = A + \ker(\phi)$

(c) Sea $\mathbf{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base adaptada a ψ y $\mathbf{B}_A = \{v_1 + A, \ldots, v_n + A\}$. Mostrar que $\mathbf{B}_A$ es una base adaptada a ψ_A.

Ejercicio 39. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática tal que, para un $A \in \mathbb{V}$, es

$$F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + c_A$$

donde $\psi_A : \mathbb{V}_A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, $\varphi_A \in \mathbb{V}_A^*$ y $c_A \in \mathbb{R}$. Si además, para $B \in \mathbb{V}$, F se escribe en la forma

$$F(x) = \psi_B(x) + 2\varphi_B(x) + c_B$$

con $\psi_B : \mathbb{V}_B \longrightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática, $\varphi_B \in \mathbb{V}_B^*$ y $c_B \in \mathbb{R}$, probar que

$$\psi_B(x) = \psi_A(x -_A B) \qquad \text{y} \qquad \varphi_B(x) = \varphi_A(x -_A B) + \phi_A(B, x -_A B)$$

Ejercicio 40. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática. Verificar que

(a) $a.F$ es una función cuadrática para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) $\mathrm{rg}(a.F) = \mathrm{rg}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(c) $\text{índ}(a.F) = \text{índ}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) $\text{índ}(a.F) = \mathrm{rg}(F) - \text{índ}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R}_{<0}$.

Ejercicio 41. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{V}^*$ no nulas y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probar que:

(a) $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = (\varphi_1(x) + c_1)(\varphi_2(x) + c_2)$ es una función cuadrática.

(b) para cada $A \in \mathbb{V}$ existen $\varphi_1', \varphi_2' \in \mathbb{V}_A^*$ no nulas y $c_1', c_2' \in \mathbb{R}$ tales que la función cuadrática definida en (a) se escribe como $F(x) = (\varphi_1'(x) + c_1')(\varphi_2'(x) + c_2')$.