Clasificación de cuádricas

Miguel Ottina - Nicolás Sirolli

Introducción

El problema de clasificación es uno de los más recurrentes en matemática, apareciendo en casi todas sus ramas. Tenemos, por ejemplo, en álgebra lineal, los problemas de decidir cuándo dos matrices dadas son equivalentes (una matriz A es *equivalente* a otra matriz B si existen matrices inversibles C y D tales que $B = CAD$) y cuándo son semejantes (una matriz A es *semejante* a otra matriz B si existe una matriz inversible C tales que $B = CAC^{-1}$). Ya en álgebra de grupos nos encontramos con el teorema de estructura que clasifica los grupos abelianos, y por ejemplo en topología diferencial con la clasificación de superficies compactas y orientables.

Sabemos que el problema de la equivalencia de matrices se resuelve mediante un *invariante*: el rango. Dos matrices del mismo tamaño son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Con respecto a la semejanza de matrices, es conocido que dos matrices son semejantes si y sólo si tienen la misma forma de Jordan. Es decir, si llevamos dos matrices dadas a una *'forma normal'* (en este caso la forma de Jordan), simplemente comparando las respectivas 'formas normales' podremos decidir si son o no semejantes.

Estos dos ejemplos ilustran las dos maneras básicas de atacar los problemas de clasificación: la búsqueda de uno (o varios) invariantes y la introducción (y posterior cálculo) de formas normales.

En estas notas nos proponemos desarrollar la clasificación de cuádricas en $\mathbb{R}^n$, donde dos cuádricas serán *equivalentes* si existe un isomorfismo afín que lleve una en la otra. Para ello, en primer lugar introduciremos la *forma normal* de las cuádricas dando ejemplos concretos de cómo calcularla. Luego, mostraremos que si dos cuádricas tienen la misma forma normal entonces resultan equivalentes. Finalmente daremos la recíproca, probando que dos formas normales distintas no son equivalentes.

1. Forma normal de cuádricas

Nuestro objetivo es, por un lado, dada una forma cuadrática F en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, encontrar un sistema de referencia en V en el cual la expresión de la forma cuadrática sea lo más sencilla posible, expresión a la que llamaremos *forma normal* de la función cuadrática F. En el camino, veremos también como encontrar expresiones "sencillas" para formas cuadráticas en el caso de un cuerpo cualquiera.

Por otro lado, buscaremos clasificar las cuádricas de $\mathbb{R}^n$. Esto es, dar una lista de cuádricas "sencillas" a las que llamaremos *formas normales*, con la propiedad de que toda cuádrica de $\mathbb{R}^n$ sea afínmente equivalente a una y sólo una de las cuádricas de esta lista.

Habiendo una relación tan íntima entre cuádricas y formas cuadráticas, resolveremos ambos problemas simultáneamente.

A continuación daremos la lista de cuádricas *tipo* que nos permitirá clasificar todas las cuádricas de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \mathscr{C}_0(h,r): & \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n = 0 & (0 < h \leq r < n,\ 2h \geq r). \\ \mathscr{C}_s(h,r): & \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 = 0 & (0 < h \leq r \leq n,\ 2h \geq r). \\ \mathscr{C}_c(h,r): & \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 - 1 = 0 & (0 < h \leq r \leq n). \end{array}$$

Las cuádricas $\mathscr{C}_0(h,r)$ serán las que representen a las cuádricas sin centro, las cuádricas $\mathscr{C}_s(h,r)$ representarán a aquellas con puntos singulares y las cuádricas $\mathscr{C}_c(h,r)$ representarán a aquellas con centro pero sin puntos singulares.

En esta sección mostraremos que toda cuádrica de $\mathbb{R}^n$ es afínmente equivalente a una de éstas, y además lo haremos de manera constructiva, lo que nos permitirá, dada una cuádrica concreta, decidir a cuál de las de la lista es afínmente isomorfa, y además construir explícitamente el isomorfismo afín. La idea es encontrar un sistema de coordenadas afines en el cual la cuádrica tiene una forma más simple. Notemos la analogía con el cambio de base que se hace para llevar una matriz a su forma de Jordan. Daremos, además, ejemplos numéricos para fijar ideas.

En la próxima sección mostraremos que dos de estas cuádricas no son afínmente equivalentes, con lo cual quedará terminada la clasificación de las cuádricas de $\mathbb{R}^n$

Necesitaremos separar en dos casos: cuádricas con centro y cuádricas sin centro. En ambos casos comenzaremos el análisis trabajando en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica distinta de 2. Sin embargo, estudiaremos cómo llevar el cálculo un poco más allá en el caso particular en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que es el que nos interesará para dar la clasificación de cuádricas.

1.1. Cuádricas con centro

Sea $\mathscr{C}$ una cuádrica en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y sea $F : V \to \mathbb{K}$ una función cuadrática que define $\mathscr{C}$, es decir, $\mathscr{C} = \{v \in V \ / \ F(v) = 0\}$. Escribimos

$$F(X) = Q(X) + 2\varphi(X) + c$$

donde $Q : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática, $\varphi \in V^*$ y $c \in \mathbb{K}$. Sea $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ la forma bilineal asociada a q.

Sea A un centro de $\mathscr{C}$. Entonces $F(X) = Q_A(X) + c_A$, con $Q_A : V_A \to \mathbb{K}$ forma cuadrática en V_A y $c_A \in \mathbb{K}$.

Notemos que si F define la cuádrica $\mathscr{C}$ entonces λF también define $\mathscr{C}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Por lo tanto, si $c_A \neq 0$, multiplicando por $-c_A^{-1}$ podemos suponer que $c_A = -1$. Es decir, podemos dar una ecuación para $\mathscr{C}$ de modo que $c_A = 0$ o bien $c_A = -1$.

Observemos que si $c_A = 0$ entonces $A \in \mathscr{C}$, con lo cual A resulta un punto singular para $\mathscr{C}$ y la cuádrica en cuestión no es más que el cono de la forma cuadrática Q_A.

En cualquier caso ($c_A = 0$ o $c_A \neq 0$) tomamos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V_A tal que $\phi_A(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$ y tal que $\phi_A(v_i, v_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq rg(Q_A)$.

En el caso particular de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reescalando los vectores de la base B podemos conseguir que $\phi_A(v_i, v_i) = 1, -1$ ó 0. En efecto, si $\phi_A(v_i, v_i) \neq 0$ y llamamos $\lambda_i = |\phi_A(v_i, v_i)|$ y $v_i' = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} v_i$, entonces $\phi_A(v_i', v_i') = \operatorname{sgn} \phi_A(v_i, v_i)$.

De forma similar, en el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, reescalando los vectores de la base B podemos conseguir que $\phi_A(v_i, v_i) = 1$ ó 0.

Resumiendo, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (que es aquél al cual prestaremos especial atención en estas notas) tenemos que existen una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V_A y $h \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq h \leq rg(\phi_A)$ tal que

$$\phi_A(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq h \\ -1 & \text{si } h \leq i = j \leq rg(\phi_A) \\ 0 & \text{si } rg(\phi_A) < i = j \leq n \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{C}$ en el sistema de coordenadas afines $S = \{A; v_1, \ldots, v_n\}$ es

$$\sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 - 1 = 0$$

donde $r = \operatorname{rg}(\phi_A)$.

Más precisamente, si definimos $\widehat{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\widehat{F}(x) = \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 - 1$ entonces $F(X) = \widehat{F}([X]_S)$ (donde $[X]_S$ denota las coordenadas del vector X en el sistema de coordenadas afines S).

La función cuadrática $\widehat{F}$ se llamará *forma normal* de la función cuadrática F y la cuádrica $\mathscr{C}' = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ \widehat{F}(X) = 0\}$ se llamará *forma normal* de la cuádrica $\mathscr{C}$.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $\mathscr{C}$ la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación

$$3x_3^2 - 4x_2x_3 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

Hallar su forma normal.

Solución. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_3^2 - 4x_2x_3 + 4x_2 - 2x_3$. Escribimos F en forma matricial como

$$F(X) = X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X^t + 2(0, 2, -1)X^t$$

Como siempre, notamos por $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a la forma bilineal asociada a F y por φ a la parte lineal de F.

Veamos si $\mathscr{C}$ tiene centro y en caso afirmativo hallemos uno. Para ello debemos resolver el sistema $[\phi]X^t = -[\varphi]$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general de este sistema es $X = (t, 1, 1), t \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathscr{C}$ tiene centro. Como basta con que hallemos uno, tomamos $A = (0, 1, 1)$ centro de $\mathscr{C}$.

Por lo tanto, podemos escribir $F(X) = Q_A(X) + c_A$, con $Q_A = \phi_A(X, X)$, $\phi_A(X) = \phi(X - A)$ y $c_A = F(A) = 1$. Como nos interesa hallar la forma normal de una cuádrica pedimos que la constante tome el valor -1. Para ello consideramos como ecuación de $\mathscr{C}$ a $-F(X) = 0$. Es decir, tenemos

$$-F(X) = (X - A) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} (X - A)^t - 1 = 0$$

Diagonalicemos $[\phi]$.

El polinomio característico es $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda$, con raíces 0, 1 y -4 y autovectores $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ y $(0, 1, -2)$ respectivamente.

Notemos por $E = \{0; e_1, e_2, e_3\}$ al sistema canónico de $\mathbb{R}^3$ y por $E + A$ al sistema $\{A; e_1 + A, e_2 + A, e_3 + A\}$. Es fácil ver que si S es un sistema afín centrado en 0, entonces $[\phi]_S = [\phi_A]_{S+A}$.

Por lo tanto, tenemos que

$$B = \{(1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)\}$$

es una base ortonormal de autovectores. Entonces $C_{BE}^{-1}[\phi_A]_{E+A}C_{BE}$ es diagonal. Pero C_{BE} es una matriz ortogonal, con lo cual $C_{BE}^{-1} = C_{BE}^t$. Por lo tanto queda que la matriz $[\phi_A]_{B+A} = C_{BE}^t[\phi_A]_{E+A}C_{BE}$ es diagonal. Obtenemos que

$$[\phi_A]_{B+A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora reescalamos los vectores para que en la diagonal aparezcan sólo los números 1, -1 ó 0 y luego los reordenamos convenientemente. Como $[\phi_A]_B = [\phi_A]_{B+A}$ tenemos que $\phi(\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)) = -4$ y por lo tanto $\phi(\frac{1}{2\sqrt{5}}(0, 1, -2), \frac{1}{2\sqrt{5}}(0, 1, -2)) = -1$.

Consideramos entonces la base

$$B' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(0, 1, -2), (1, 0, 0)\}$$

y obtenemos que

$$[\phi]_{B'} = [\phi_A]_{B'+A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{C}$ en el sistema de coordenadas afines $S = \{A; B'\}$ es

$$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0.$$

$\square$

1.2. Cuádricas sin centro

Sea $\mathscr{C}$ una cuádrica de V definida por una función cuadrática $F : V \to \mathbb{K}$ dada por

$$F(x) = Q(x) + 2\varphi(x) + c,$$

con $Q : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática, $\varphi \in \mathbb{K}^*$, y $c \in \mathbb{K}$. En el caso en que esta cuádrica tenga centro, es decir, que exista un $A \in V$ tal que $\varphi_A = 0$, vimos que podíamos aprovechar esto para centrarnos en A y obtener así una expresión para F en la que no aparecieran términos lineales.

Cuando no hay centro, caso que vamos a analizar en esta sección, no podemos hacer "desaparecer" los términos lineales. Sin embargo, podemos conseguir $C_A = 0$ tomando $A \in \mathscr{C}$. El objetivo es entonces, dado que no hay manera de hallar una base de V_A en la que la expresión de F carezca de términos lineales, buscar una en la que aparezcan tan pocos como sea posible, lo cual se conseguirá teniendo en mente que aunque el núcleo de φ_A no sea todo V_A, será algo bastante "grande": un hiperplano.

Para lograr esto, nuestro objetivo es hallar una base $B_A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V_A de manera que

1. $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in T_A$.
2. $v_n \in \ker \phi_A \setminus T_A$.
3. $\phi_A(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$.

Notemos que esto será posible gracias a que, como no hay centro, se tendrá que $\ker \phi_A \not\subseteq T_A$ (esto lo demostraremos en el lema 1.1). Entonces para construir una tal base primero se toma un vector $v_n \in \ker \phi_A \setminus T_A$, y luego restringiendo a ϕ_A a T_A, se toma $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ base de T_A que sea ortogonal con respecto a ϕ_A. Podemos suponer además, reordenando los vectores de esta base, que $\phi_A(v_i, v_i) = 0$ para $i > r$, donde $r = \mathrm{rg}(\phi_A)$ (notar que $r < n$ pues ¡F no tiene centro!), y reescalando a v_n, que $\varphi_A(v_n) = 1$.

De esta manera, si $[x]_{B_A} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} Q_A(v_i) x_i^2 + 2x_n.$$

En principio, trabajar en V resulta más cómodo que hacerlo en V_A. Entonces veamos cómo reformular el problema de hallar una tal base en términos de una base de V. Para esto notemos que $\ker \phi_A = A + \ker \phi$, que $T_A = H_A + A$, donde H_A es el hiperplano de V de ecuación

$$H_A : \phi(A, x) + \varphi(x) = 0,$$

y que $\varphi_A(x) = \varphi(x - A) + \phi(x - A, A) = \varphi(x - A)$, si $x - A \in \ker \phi$.

Entonces el problema se reduce a hallar $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de V de manera que

1. $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in H_A, u_n \notin H_A$.
2. $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n \in \ker \phi$.
3. $\phi(u_i, u_j) = 0$ si $i \neq j$.
4. $\varphi(u_n) = 1$.

Una vez logrado esto, poniendo $v_i = u_i + A$ se obtendrá la base B_A buscada. Notemos que al construir B_A de esta manera, si $[x]_{B_A} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entonces

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} Q(u_i)x_i^2 + 2x_n.$$

Cuando en particular trabajemos en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, podemos encontrar una expresión todavía más sencilla para F reescalando los vectores de la base de manera que $Q(u_i) = \pm 1$ para $1 \leq i \leq r$. Además, si h (con $0 \leq h \leq r$) es la cantidad de índices i para los cuales $Q(u_i) = 1$, reordenaremos los vectores de la base para que $Q(u_i) = 1$ para $1 \leq i \leq h$ y $Q(u_i) = -1$ para $h < i \leq r$. Así, resulta

$$F(x) = \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n,$$

siendo ésta, por definición la *forma normal* de la función cuadrática F. Notemos que no depende de las elecciones que hemos hecho en el camino para calcularla, ya que r y h son respectivamente el rango y el índice de ϕ.

Por último, cuando pensamos en la cuádrica más que en la forma cuadrática, notemos que aunque r es un número propio de la cuádrica, independiente de la función cuadrática que la defina, el número h no lo es. Porque si cambiamos F por $-F$, la cuádrica es la misma pero h cambia por $r - h$. Entonces, para que evitar esta ambigüedad pedimos que $h > 0$ y $2h \geq r$, cosa que siempre podremos lograr cambiando F por $-F$.

Llegamos así a la *forma normal* de $\mathscr{C}$. Esta es, por definición, la cuádrica $\mathscr{C}'$ de $\mathbb{R}^n$ dada por la ecuación

$$\mathscr{C}' : \quad \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n = 0.$$

Si revisamos minuciosamente lo hecho, vemos que hemos demostrado que las cuádricas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son afínmente equivalentes. Veremos en la próxima sección la buena definición de la forma normal, esto es, que la cuádrica $\mathscr{C}'$ depende exclusivamente de $\mathscr{C}$ y no de las elecciones que hemos hecho en el camino para hallarla.

A la hora de calcular efectivamente la forma normal de una cuádrica sin centro, nos encontramos con que el procedimiento que hemos seguido requiere de conocer algún punto de la cuádrica. En principio, esto implica resolver una ecuación cuadrática, lo cual no es fácil. El siguiente resultado muestra que siempre puede hallarse un punto de la cuádrica resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Lema 1.1. *Sea $F : V \to \mathbb{K}$ una función cuadrática sin centro dada por*

$$F(x) = Q(x) + 2\varphi(x) + c,$$

con Q forma cuadrática, φ forma lineal y $c \in \mathbb{K}$. Sea ϕ la forma bilineal asociada a Q. Sea W el hiperplano dado por la ecuación $W : 2\varphi(x) + c = 0$, y sea H_0 su subespacio por el origen, esto es, el hiperplano dado por la ecuación $H_0 : \varphi(x) = 0$ Entonces,

1. $\ker \phi \nsubseteq H_0$ *(y por lo tanto para todo $A \in V$ se tiene $\ker \phi_A \nsubseteq T_A$).*
2. $\ker \phi \cap W \neq \varnothing$.

Demostración. Notemos que la primera afirmación dice que $\ker \phi$ no es paralelo al hiperplano H_0. Por el teorema de la dimensión para variedades lineales, esto implica la segunda afirmación.

Supongamos entonces que $\ker \phi \subseteq H_0$. Entonces,

$$\varphi \in (H_0)^\circ \subseteq (\ker \phi)^\circ = (\ker L_\phi)^\circ = \mathrm{Im} L_\phi.$$

Así, vemos que $-\varphi \in \mathrm{Im} L_\phi$, lo cual es imposible ya que F no tiene centro. □

Notemos en particular que cuando, para hallar la forma normal de una cuádrica sin centro, nos centremos en un punto $A \in \ker \phi \cap W$ obtenido según este lema, resulta $H_A = H_0$, ya que $H_A : \phi(x, A) + \varphi(x) = 0$ y $A \in \ker \phi$.

En resumidas cuentas, podemos calcular la forma normal de una cuádrica $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ dada por una función cuadrática $F = Q + 2\varphi + c$ según el siguiente "algoritmo":

1. Resuelvo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} [\phi] x^t = 0 \\ 2\varphi(x) + c = 0, \end{cases}$$

   encontrando una solución A.

2. Busco $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ que satisfaga

   a) $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in \ker \varphi$.
   b) $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n \in \ker \phi$.
   c) $\phi(u_i, u_j) = 0$ si $i \neq j$.
   d) $\phi(u_i, u_i) = 1$ si $1 \leq i \leq h$, y $\phi(u_i, u_i) = -1$ si $h < i \leq r$.
   e) $\varphi(u_n) = 1$.

Una vez hecho esto, y cambiando F por $-F$ de ser necesario para que $2h \geq r$, podemos concluir que en el sistema $\{A; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ la ecuación de $\mathscr{C}$ es

$$\sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n = 0.$$

Ejemplo 2. Sea $\mathscr{C}$ la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ dada por la función cuadrática

$$F(x) \;=\; x\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x^t + 2(2x_1 + x_2 + x_3) - 2.$$

Solución. Se puede comprobar que $\mathscr{C}$ no tiene centro con el método usual. Busquemos su forma normal.

Primero resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

obteniendo a $A = (-1, 1, 2)$ como única solución.

Ahora buscamos la base. Notemos que $r = 2$. Se tiene que

$$\ker\phi = \langle(-1, 1, 2)\rangle\,, \quad \ker\varphi = \langle(0, 1, -1), (1, -2, 0)\rangle\,.$$

Tomemos $u_3 = (-1, 1, 2)$, de manera que $u_3 \in \ker\phi$ y $\varphi(u_3) = 1$. Para buscar a u_2 buscamos un vector cualquiera en $\ker\varphi \setminus \ker\phi$, como por ejemplo $v = (0, -1, 1)$. Como $Q(v) = -10$, normalizamos poniendo $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}v$ y se tiene que $u_2 \in \ker\varphi$ y $Q(u_2) = -1$.

Finalmente, busquemos un vector $w \in \ker\varphi \backslash \ker\phi$ que cumpla que $\phi(u_2, w) = 0$, o equivalentemente, $\phi(v, w) = 0$. Calculando la intersección entre los planos $\ker\varphi$ y $\ker L_\phi(v)$, vemos que podemos tomar $w = (-10, 7, 13)$. Como $Q(w) = 50$, normalizamos poniendo $u_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}w$. Así, $\phi(u_1, u_2) = 0, u_1 \in \ker\varphi$ y $Q(u_1) = 1$.

No habiendo necesidad de reordenar vectores ni de cambiar F por $-F$, la forma normal de $\mathscr{C}$ es la cuádrica

$$\mathscr{C}' : \quad x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0.$$

$\square$

2. Clasificación de cuádricas

En la sección anterior vimos cómo obtener la forma normal de una cuádrica de $\mathbb{R}^n$. Ahora, valiéndonos de las formas normales daremos la clasificación de cuádricas en $\mathbb{R}^n$, donde, como ya hemos dicho, dos cuádricas serán *equivalentes* si existe un isomorfismo afín que lleve una en la otra (ver definición 2.1).

Demostraremos, en primer lugar, que si dos cuádricas tienen la misma forma normal entonces resultan equivalentes (2.3). Finalmente daremos la recíproca, probando que dos formas normales distintas no son equivalentes (2.7).

Definición 2.1. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ cuádricas en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son *afínmente equivalentes* si existe un isomorfismo afín $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Claramente esto define una relación de equivalencia entre las cuádricas de $\mathbb{R}^n$. Esencialmente, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ serán afínmente equivalentes cuando escribiendo la ecuación de $\mathscr{C}$ en un sistema de referecia adecuado, podemos hacer que coincida con la ecuación de $\mathscr{C}'$.

En particular, esto implica que $\mathscr{C}$ tendrá centro si y sólo si $\mathscr{C}'$ lo tiene, y lo mismo ocurre con los puntos singulares. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se deja como ejercicio para el lector.

Proposición 2.2. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ cuádricas en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo afín tal que tal que $\alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$. Denotemos por $\mathscr{C}_c$ y $\mathscr{C}'_c$ a los centros de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ respectivamente, y por $\mathscr{C}_s$ y $\mathscr{C}'_s$ a conjuntos de puntos singulares de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ respectivamente. Entonces, $\alpha(\mathscr{C}_c) = \mathscr{C}'_c$ y $\alpha(\mathscr{C}_s) = \mathscr{C}'_s$*

La proposición que sigue es la primera mitad de la clasificación de cuádricas en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ cuádricas en $\mathbb{R}^n$ que tienen la misma forma normal. Entonces $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son afínmente equivalentes.*

Demostración. Sea g la función cuadrática asociada con la forma normal de $\mathscr{C}$ (y luego también de $\mathscr{C}'$) y sean S y S' sistemas de coordenadas afines en $\mathbb{R}^n$ tales que la cuádrica $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$) en el sistema S (resp. S') queda escrita en su forma normal.

Entonces se tiene que $\mathscr{C} = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ g([X]_S) = 0\}$ y $\mathscr{C}' = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ g([X]_{S'}) = 0\}$. Es decir, si definimos $F, F' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F(X) = g([X]_S)$ y $F'(X) = g([X]_{S'})$ entonces F y F' definen $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ respectivamente.

Sean $\psi, \psi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por $\psi(X) = [X]_S$ y $\psi'(X) = [X]_{S'}$. Entonces ψ y ψ' son isomorfismos. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "g"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\psi'"'] \arrow[dl, "F'"] \\
& \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha = (\psi')^{-1}\psi$. Entonces $F'\alpha = F$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} &= \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ F(X) = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ F'(\alpha(X)) = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ \alpha(X) \in \mathscr{C}'\} = \\
&= \alpha^{-1}(\mathscr{C}').
\end{aligned}$$

Entonces $\alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$, luego $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son afínmente equivalentes. □

Es importante notar que la demostración anterior nos permite construir explícitamente un isomorfismo afín que lleve una cuádrica en la otra.

Esto puede verse desde otro punto de vista equivalente. Dada $\mathscr{C}$ cuádrica de $\mathbb{R}^n$, si F es la forma normal de la función cuadrática que la define, utilizando los mismos argumentos que antes puede probarse que $\mathscr{C}$ es afínmente equivalente a la cuádrica definida por la ecuación $F(x) = 0$. En particular, si dos cuádricas tienen la misma forma normal, entonces resultan afínmente equivalentes.

Para completar la clasificación de cuádricas necesitamos algunos resultados previos relacionados con polinomios homogéneos. Comenzamos por la definición.

Definición 2.4. Sea $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Decimos que p es un *polinomio homogéneo de grado* r si todos sus monomios tienen grado r.

Por ejemplo, las formas cuadráticas son polinomios homogéneos de grado 2. Además, no es difícil ver que p es homogéneo de grado r si y sólo si $p(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r p(x_1, \ldots, x_n)$ para todos $x_1, \ldots, x_n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Dado un polinomio no homogéneo p hay una forma de construir un polinomio homogéneo asociado a él, que se llama el *homogeneizado* de p.

Definición 2.5. Sea $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio de grado m. El *homogeneizado de* p es el polinomio $p_h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ definido por

$$p_h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}^m \, p(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}).$$

Notemos que, con las notaciones de la definición anterior, p_h resulta un polinomio homogéneo de grado m. Además, $p_h(x_1, \ldots, x_n, 1) = p(x_1, \ldots, x_n)$.

Como ejemplo, consideremos $p(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2 - 1$. Entonces su homogeneizado es $p_h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 - x_3^3$.

Lema 2.6. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ cuádricas de $\mathbb{R}^n$ afínmente equivalentes definidas por las funciones cuadráticas F y G respectivamente y tales que no están contenidas en una variedad lineal de dimensión $n-2$. Sean $\mathscr{C}_h$ y $\mathscr{C}'_h$ las cuádricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ definidas por las formas cuadráticas F_h y G_h respectivamente. Entonces $\mathscr{C}_h$ y $\mathscr{C}'_h$ son afínmente equivalentes.*

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo afín tal que $\alpha(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$. Entonces $G \circ \alpha = \lambda F$ para cierto $\lambda \neq 0$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq n)$, dado que α_j es una función lineal podemos homogeneizarla obteniendo así una función lineal $(\alpha_j)_h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Definamos $\alpha_h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\alpha_h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((\alpha_1)_h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \ldots, (\alpha_n)_h(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), x_{n+1}).$$

Es fácil ver que α_h es un isomorfismo lineal.

Se tiene que $G_h \circ \alpha_h = (G \circ \alpha)_h = (\lambda F)_h = \lambda F_h$. Por lo tanto $\alpha_h(\mathscr{C}_h) = \mathscr{C}'_h$. □

Terminamos la clasificación de las cuádricas de $\mathbb{R}^n$ con el siguiente resultado, que nos dice en particular que es correcto hablar de *la* forma normal de una cuádrica.

Proposición 2.7. *Entre las cuádricas*

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_0(h,r):&\quad \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n = 0 &&(0 < h \leq r < n,\ 2h \geq r),\\
\mathscr{C}_s(h,r):&\quad \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 = 0 &&(0 < h \leq r \leq n,\ 2h \geq r),\\
\mathscr{C}_c(h,r):&\quad \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 - 1 = 0 &&(0 < h \leq r \leq n),
\end{aligned}$$

no hay dos distintas que sean afínmente equivalentes.

Demostración. Por la proposición 2.2, basta con chequear que $\mathscr{C}_0(h,r)$ (respectivamente $\mathscr{C}_s(h,r)$, $\mathscr{C}_c(h,r)$) no es afínmente equivalente a $\mathscr{C}_0(h',r')$ (respectivamente $\mathscr{C}_s(h,r)$, $\mathscr{C}_c(h,r)$) si $(h,r) \neq (h'r')$.

Analizamos, en primer lugar, el caso $\mathscr{C}_0(h,r)$. Supongamos que tenemos un isomorfismo afín $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(\mathscr{C}_0(h,r)) = \mathscr{C}_0(h',r')$. Consideremos las funciones cuadráticas

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2 + 2x_n, \\ G(x) &= \sum_{i=1}^{h'} x_i^2 - \sum_{i=h'+1}^{r'} x_i^2 + 2x_n. \end{aligned}$$

Entonces, $\mathscr{C}_0(h,r)$ está definida tanto por la ecuación $F(x) = 0$ como por la ecuación $G(\alpha(x)) = 0$. Para poder concluir que existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda F = G \circ \alpha$, necesitamos que la cuádrica $\mathscr{C}_0(h,r)$ no esté contenida en ninguna variedad lineal de dimensión $n-2$. Más aún, veamos que $\mathscr{C}_0(h,r)$ no está contenida en una variedad de dimensión $n-1$. Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} A = {} & \{2e_1 - 2e_n, 4e_1 - 8e_n, 6e_1 - 18e_n\} \cup \{2e_i - 2e_n : 2 \leq i \leq h\} \cup \\ & \cup \{2e_i + 2e_n : h+1 \leq i \leq r\} \cup \{e_i : r+1 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

que consiste de $n+1$ puntos afínmente independientes de la cuádrica $\mathscr{C}_0(h,r)$. Por lo tanto $\mathscr{C}_0(h,r)$ no está contenida en ninguna variedad de dimensión $n-1$.

Luego, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda F = G \circ \alpha$. En particular, tendremos que

$$r = \operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg}(\lambda F) = \operatorname{rg}(G \circ \alpha) = \operatorname{rg}(G) = r'.$$

Usando el mismo argumento, tendremos que $h = h'$ si $\lambda > 0$ o que $h = r' - h'$ si $\lambda < 0$. Pero esta última posibilidad queda descartada pues hemos pedido que $2h \geq r$ y $2h' \geq r'$. Concluimos así que $(h,r) = (h',r')$, como queríamos demostrar.

Estudiamos, en segundo lugar, el caso $\mathscr{C}_s(h,r)$. Supongamos que tenemos un isomorfismo afín $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(\mathscr{C}_s(h,r)) = \mathscr{C}_s(h',r')$. Consideramos las funciones cuadráticas

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{h} x_i^2 - \sum_{i=h+1}^{r} x_i^2, \\ G(x) &= \sum_{i=1}^{h'} x_i^2 - \sum_{i=h'+1}^{r'} x_i^2. \end{aligned}$$

Entonces, $\mathscr{C}_0(h,r)$ está definida tanto por la ecuación $F(x) = 0$ como por la ecuación $G(\alpha(x)) = 0$. Si $\mathscr{C}_0(h,r)$ no está contenida en una variedad de dimensión $n-2$, entonces el resultado se sigue procediendo en forma análoga al caso anterior.

Supongamos entonces que $\mathscr{C}_0(h,r)$ está contenida en una variedad S de dimensión $n-2$ (y luego $\mathscr{C}_0(h',r')$ estará contenida en $\alpha(S)$). Luego S resulta un subespacio, y por lo tanto la cuádrica coincide con el núcleo de la forma bilineal asociada y dicha forma bilineal debe ser semidefinida positiva (ya que $h > 0$). Así, $r = h$ (y $r' = h'$). Entonces, $\mathscr{C}_0(h, r)$ y $\mathscr{C}_0(h', r')$ son subespacios afínmente equivalentes de dimensión $n - r$ y $n - r'$ respectivamente, con lo cual $r = r'$.

Resta analizar el caso $\mathscr{C}_c(h, r)$. No es difícil verificar que estas cuádricas no están contenidas en una variedad de dimensión $n - 2$.

Supongamos que $\mathscr{C}_c(h, r)$ y $\mathscr{C}_c(h', r')$ son afínmente equivalentes. Entonces por 2.6 $\mathscr{C}_c(h, r)_h$ y $\mathscr{C}_c(h', r')_h$ también lo son. Pero $\mathscr{C}_c(h, r)_h$ y $\mathscr{C}_c(h', r')_h$ son cuádricas en $\mathbb{R}^{n+1}$ de los tipos $\mathscr{C}_s(h, r + 1)$ y $\mathscr{C}_s(h', r' + 1)_h$. Luego, por el caso anterior, $(h, r) = (h', r')$. □

Referencias

[1] Larrotonda, Ángel Rafael. *Álgebra lineal y geometría*. Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1977.