

### PRÁCTICA 3

- 1 Probar las siguientes proposiciones en el plano proyectivo real:
  - a) Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta .
  - b) No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta .
  - c) Toda recta tiene por lo menos tres puntos .
  - d) Dos rectas distintas del plano proyectivo siempre tienen un punto común .
  - e) No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto .
  - f) Por todo punto del plano proyectivo pasan por lo menos tres rectas .
  
- 2 Si  $A, B, C$  son puntos de una recta  $r$  y  $A', B', C'$  otros de una recta  $r'$ , tales que  $AA', BB', CC'$  sean rectas concurrentes. Probar que los puntos  $P = AB' \cap A'B$ ,  $Q = BC' \cap B'C$  y  $R = AC' \cap A'C$  están alineados con el punto  $O = r \cap r'$ .
  
- 3 Deducir las fórmulas que permiten escribir el valor de la razón doble de cuatro puntos en coordenadas homogéneas y en coordenadas no homogéneas.
  
- 4 Dados cuatro puntos alineados tales que  $(ABCD) = \rho$ , calcular el valor de todas las razones dobles que pueden definirse con esos puntos.
  
- 5 Si  $A = (2, 1, 3)$   $B = (1, 1, 3)$   $C = (0, 1, 3)$   $D = (1, 1, 3)$ , calcular  $(A, B, C, D)$ .
  
- 6 Si  $A = (2, 1, 3)$   $B = (1, 1, 3)$   $C = (0, 1, 3)$ , hallar si es posible,  $D$  tal que  $(A, B, C, D) = 3$ .
  
- 7 Dados dos puntos propios  $A, B$  del plano proyectivo, sea  $R$  el punto impropio de la recta  $AB$ . Construir el cuarto armónico de  $ABR$ .
  
- 8 Un triángulo  $ABC$  se corta con una recta  $r$ , llamemos  $P_a, P_b$  y  $P_c$  a los puntos de intersección con cada uno de los lados. Sean  $P'_a$  el conjugado armónico de  $P_a$  respecto de  $C, B$  y análogamente  $P'_B$  y  $P'_c$ .
  - a) Probar que  $AP'_a$ ,  $BP'_b$  y  $CP'_c$  concurren en un punto.
  - b) Enunciar el teorema dual.
  
- 9 Trazar por un punto dado del plano una recta que pase por el punto de intersección de otras dos que se cortan fuera de los límites del dibujo.

**10** Hallar las ecuaciones de la colineación que manda los puntos:

$$A = (1, 0, 0) \quad B = (0, 1, 0) \quad C = (1, 1, 1) \quad D(2, 0, 1)$$

en los puntos:

$$A = (0, 0, 1) \quad B = (0, 1, 1) \quad C = (1, 0, 1) \quad D(-1, 2, 3)$$

**11** Enunciar los teoremas límite del teorema de Brianchon, y verificar que son los teoremas duales de los teoremas límite del teorema de Pascal.

**12** Dados cinco puntos de una cónica, hallar otros puntos

**13** Dada una cónica por 4 tangentes y el punto de contacto de una de ellas, hallar :

a) otra tangente.

b) el punto de contacto de otra de las tangentes dadas.

**14** Los vértices  $Y, Z$  de un triángulo  $XYZ$  se mueven sobre dos rectas  $y, z$  y además los lados  $YZ, YX, XZ$  pasan respectivamente por los puntos fijos  $A, B, C$ . Probar que el punto  $X$  describe una cónica.

**15** Dado un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , hallar una homología que lo transforme en un paralelogramo.

**16** Probar que la colineación que manda  $A, B, C, D$  en  $B, A, D, C$  es una homología. Hallar el eje y el centro.