PRÁCTICA 2

1 Construir los siguientes números $\sqrt{7}$, $\frac{3}{5}$, $2+3\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$.

2 Probar los siguientes resultados:
a) Cada una de las bases medias de un triángulo es paralela e igual a la mitad del lado correspondiente.
b) Las tres bases medias dividen al triángulo en 4 triángulos congruentes entre sí y semejantes al triángulo dado.

3 Sea ABC un triángulo y R el radio de la circunferencia circunscripta. Probar:

a) $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$

b) $a = b\cos C + c\cos B$

c) área $ABC = \dfrac{abc}{4R}$

4 Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto.

5 Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto.

6 Las bisectrices de un triángulo dividen al lado opuesto en dos segmentos de longitud proporcional a la longitud de los lados adyacentes.

7 Demostrar que las bisectrices de un triángulo concurren en un punto usando el teorema de Ceva y el resultado anterior.

8 Dado el triángulo ABC, sea I el incentro. Se traza por I una paralela al lado AB que determina con el lado CA un punto D y con el lado CB un punto E.
Probar que : DE = AD + BE

9 Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.

10 En todo triángulo, las medianas y las rectas que contienen a las alturas concurren respectivamente en un punto ¿Qué propiedad tiene el punto de intersección de las medianas?

11 Si un triángulo tiene dos de sus medianas congruentes, entonces es isósceles.

12 El ortocentro de un triángulo acutángulo es el centro de la circunferencia inscripta a su triángulo órtico.

13 Sean AD, CF y BE las alturas del ABC. Los triángulos AEF, DBF, DEC y ABC son semejantes.

14 Dado ABC, llamemos $A'B'C'$ a su medial:
a) ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo baricentro.
b) Las alturas de $A'B'C'$ son mediatrices de ABC.
c) El punto medio del segmento de Euler es el centro de la circunferencia circunscripta al $A'B'C'$.

15 Dado el triángulo ABC, sean H el punto de intersección de las alturas AD, BE y CF; A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB. Por último sean K, M y N los puntos medios de los segmentos AH, BH y CH respectivamente.
a) Probar que $B'C'LM$ es un paralelogramo.
b) Probar que $BC \perp AH$, concluir que $B'C'LM$ es un rectángulo.
c) Idem para $A'B'KL$ y $C'A'MK$.
d) Observar que: $A'K$, $B'L$ y $C'M$ son diámetros de la misma circunferencia y como el ángulo $A'DK$ es recto, esta circunferencia pasa por D.
Concluir que: Los pies de las tres alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro, están todos en la misma circunferencia (de radio 1/2R). Es la llamada circunferencia de los 9 puntos.

16 La figura que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero es un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero original.

17 Si una diagonal divide un cuadrilátero en dos triángulos de igual área, entonces corta a la otra diagonal en su punto medio. ¿Vale el resultado recíproco ? Justificar.

18 a) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus diagonales son perpendiculares. Probar que el cuadrilátero con vértices en los puntos medios de los lados es un rectángulo. ¿Qué condición deben cumplir las diagonales para que sea un cuadrado?
b) Sean A y B los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadriltero y M y N los puntos medios de una de sus diagonales. ¿Qué clase de cuadrilátero es AMBN?

19 Cuatro cantidades distintas cualesquiera tales que cada una es menor que la suma de las otras tres, sirven como lados de tres cuadriláteros cíclicos distintos, todos con igual área.
a) Si los lados son a, b, c y d y llamamos s al semiperímetro, probar que el área K verifica

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

b) Dado el triángulo de lados a, b, y c y semiperímetro s probar la fórmula de Herón para calcular su área K

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

20 Analizar por lo menos 5 casos de construcción de triángulos dados 3 de sus elementos.

21 Sea P un punto exterior a una circunferencia de centro O y radio r y sean T y T' dos puntos sobre la circunferencia tales que PT y PT' son tangentes a la circunferencia.
a) Comparar los triángulos OTP y $OT'P$.
b) Probar que $TOT'P$ puede inscribirse en una circunferencia. ¿Cuál es el radio y cuál es el centro de la misma?

22 Trazar las tangentes a una circunferencia por un punto exterior a la misma.

23 Justificar el siguiente trazado de las tangentes exteriores a dos circunferencias: dadas las cicunferencias $C_1 = C(O_1, r_1)$ y $C_2 = C(O_2, r_2)$ con $r_1 \geq r_2$, construir la circunferencia de centro O_1 y radio $r_1 - r_2$ y desde O_2 la tangente a ella : O_2T; trazar la recta que pasa por T y O_1 hasta cortar a C_1 en un punto T_1 ; trazar por O_2 una paralela a O_1T_1 que al cortar C_2 determina el punto T_2 ; T_1T_2 es la tangente buscada.

24 Con un argumento similar al del ejerccio anterior trazar las tangentes interiores comunes a dos circunferencias.

25 Analizar por lo menos 2 casos de construcción de circunferencias dados 3 de sus elementos