# PRÁCTICA 1

**1** Dado un segmento AB, definimos la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y de B. Probar que:
m es mediatriz de AB $\Leftrightarrow$ m $\perp$ AB y m $\cap$ AB es el punto medio de AB.

**2** Sea ABC un triángulo isóceles con AB=BC.
a) Probar que la bisectriz del ángulo B es mediana para el lado AC.
b)¿Vale el recíproco?
c) ¿Qué relación hay entre la mediatriz del segmento AC y la altura del triángulo correspondiente al lado AC?

**3** Dados los puntos $F_1 = (c; 0)$ y $F_2 = (-c; 0)$:
a) hallar la ecuación del conjunto de puntos tales que la suma de las distancias a los puntos dados es constante y mayor que $2c$. Esta ecuación define la elipse de focos $F_1$ y $F_2$.
b) Si escribimos la ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ , ¿qué representan $a$ y $b$?, cmo se relacionan con $c$. ¿Y con la constante que representa la suma de las distancias a los focos?
c) La recta que contiene a los focos se llama eje principal, y la perpendicular por el origen eje menor. ¿Cuál es la ecuación de cada uno de los ejes?
d) Analizar la posición de la elipse si los focos estuvieran en $(0; c)$ y $(0; -c)$.
e) Hallar la ecuación de la elipse encontrada en a) si el centro se desplaza a $(x_0, y_0)$.
¿Cuáles son las coordenadas de los focos?

**4** Hallar la ecuación de la elipse centrada en el origen con un foco en $(3; 0)$ y tal que la suma de las distancias es 8.

**5** ¿Cuál es la definición de la circunferencia como lugar geométrico? Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:
a)Centro $(1; 1)$ y que pasa por el $(5; 5)$.
b)Centro sobre la recta $y = x + 1$ que pasa por los puntos $(1; 3)$ y $(2; 6)$

**6** Dados los puntos $F_1$ y $F_2$, se llama hipérbola de focos $F_1$ y $F_2$, al conjunto de puntos tales que el módulo de la diferencia de las distancias a los puntos dados es constante. Hallar la ecuación si $F_1 = (c; 0)$ y $F_2 = (-c; 0)$. ¿Qué condición debe cumplir la constante?

**7** Definir la parábola como lugar geométrico y hallar la ecuación de la parábola de foco $(0; -2)$ y directriz $y = 2$.

**8** Hallar la ecuación de la parábola de foco $(-2;0)$ y directriz $x=2$.

**9** a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la segunda circunferencia del ejercicio 5 a) en el punto $(5;5)$
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola de foco $(0;4)$ y directriz $y=-4$, en el punto $(4;1)$
¿Se puede decir que una recta es tangente a la parábola si la corta en un único punto?

**10** Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia trazadas por uno de sus puntos.Sugerencia:
Tomar el punto como origen del sistema de coordenadas y el diámetro que pasa por él como eje x, para obtener que los puntos son de la forma:

$$x=\frac{r}{1+m^2} \qquad y=\frac{rm}{1+m^2}$$

Observar que $m=\dfrac{y}{x}$ y obtener la ecuación implícita del lugar geométrico, qu representa?

**11** Dado el triángulo rectángulo $ABC$ y un punto $M$ sobre la hipotenusa $AB$, se traza por $M$ una perpendicular hasta cortar a las rectas que contienen a los catetos. Sea $N$ la intersección de la perpendicular con la recta que contiene al cateto $AC$ y $P$ la intersección con la recta que contiene al cateto $BC$. Las rectas $BN$ y $AP$ se cortan en un punto $Q$. Probar que cuando $M$ varía el lugar geométrico que describe el punto $Q$ es una semicircunferencia. Cuál es el centro y cuál es el radio?

**12** Dados un punto $Q$ y una circunferencia $C$, hallar el conjunto de puntos que equidistan de $Q$ y de $C$.

**13** Dados los puntos $A=(0,0)$, $B=(4,0)$ y $C=(12,0)$, encontrar el lugar geométrico de los puntos $M$, tale que resultan congruentes los ángulos $AMB$ y $BMC$. Sugerencia: si son congruentes los ángulos, las tangentes de los mismos coinciden.