Temas de Geometría

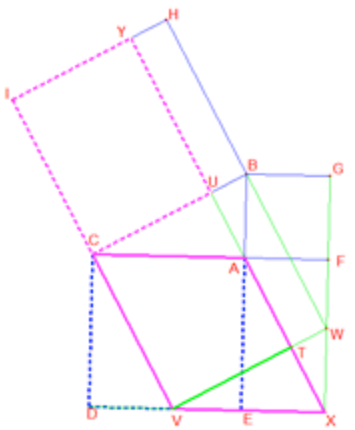
| María de la Paz Álvarez Scherer | Revista Digital Matemática, Educación e Internet |

El (todavía) soprendente teorema de Pitágoras.

María de la Paz Alvarez Scherer
Departamento de Matemática
Universidad Nacional Autónoma de México

¿Qué de sorprendente tiene el teorema el teorema de Pitagóras hoy día? A la autora de esta nota, aún le parece impresionante la fuerza de este teorema y de sus generalizaciones más conocidas: la ley de los cosenos y el teorema referido a otras figuras geométricas regulares. En esta nota se mostrará otra generalización que se refiere a triángulos *cualesquiera* y a paralelogramos *cualesquiera*.

Empecemos por una demostración del teorema de Pitágoras puramente geométrica:



Tenemos un triángulo rectángulo ΔABC. Construimos los cuadrado $ABGI$ y $ACDE$

El paralelogramo $ACVX$ tiene la misma área que el cuadrado $ACDE$: los dos tienen base igual y la misma altura.

Pero $AX = CV = BW$, ya que son lados opuestos de paralelogramos. y $VTUC$ tiene la misma área que el $ACVX$ por tener igual base y la misma altura.

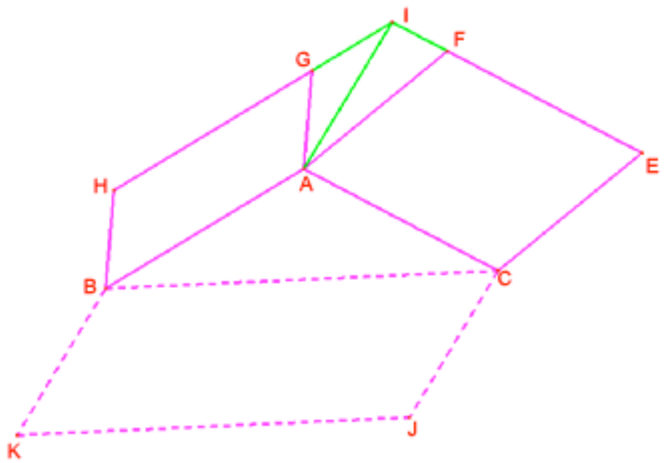
Como el triángulo $\Delta CDV \cong \Delta CAB$, $AX = CV = CI = YU$, y tenemos que el rectángulo $UCIY$ tiene la misma área que el $VTUC$

Análogamente, el paralelogramo $ABWX$ tiene la misma área que el cuadrado $ABGI$; y $BUTW$ tiene la misma área que $ABWX$. Y el rectángulo $HYUB$ tiene la misma área que $BUTW$.

Pero los rectángulos $VTUC$ y $BUTW$ forman el cuadrado de lado CB ∎

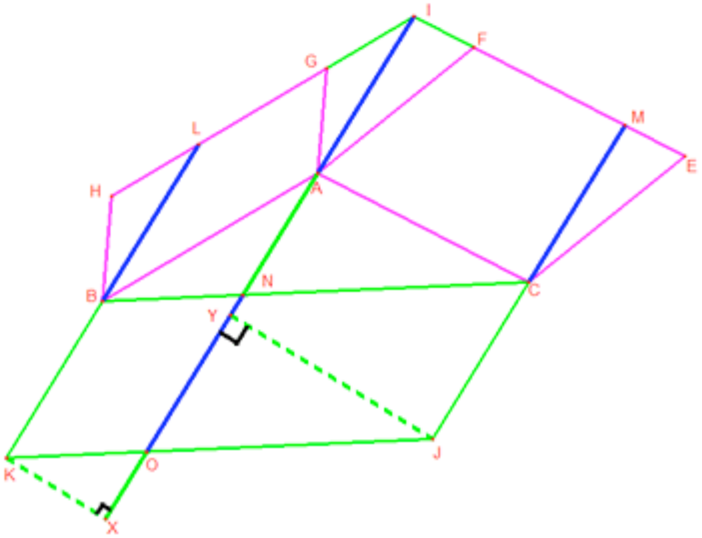
El teorema que demostraremos ahora, es una generalización del anterior. Se debe al gran geómetra griego Pappus (320 AD).

Tomamos un triángulo *cualquiera* ΔABC. Sobre dos de sus lados (por ejemplo, en los lados AB y AC) construimos paralelogramos *cualesquiera*, (en este caso el $ABGH$ Y EL $ACEF$) El tercer paralelogramo se construye así:



Se prolongan los lados de los paralelogramos construidos. Sea I el punto de intersección de dichos lados; entonces. AI tiene la magnitud y la dirección de los lados del tercer paralelograma; en este caso el $BCJK$. . Es decir, BK y CJ son paralelos e iguales a AI .

Esta generalización del Teorema de Pitágoras asegura el área de $BCJK$ es igual a la suma de las áreas $ABGH$ y $ACEF$. . Nótese que si el triángulo es rectángulo y los paralelogramos son cuadrados, tenemos (como caso particular) al Teorema de Pitágoras. La demosración de este teorema se basa exactamente en la que hicimos más arriba del de Pitágoras; es decir, en encontrar áreas iguales.



Construimos KX y JY , alturas de los paralelogramos $ABGH$ y $ACEF$ respectivamente.

El paralelogramos $ABGH$ tiene la misma área que el $ABLI$, por tener base igual y la misma altura. Pero el paralelogramos $ABLI$ tiene la misma área que el $BNOK$, por la misma razón: $LB = BK$ por construcción, y la altura KX es común para los tres paralelogramos.

Análogamente, las áreas de los paralelogramos $ACEF$, $ACMI$ y $CNOJ$ son iguales.

De aquí tenemos que el paralelogramos $BCJK$ tiene área igual a la suma de los paralelogramos construidos sobre los otros dos lados.■