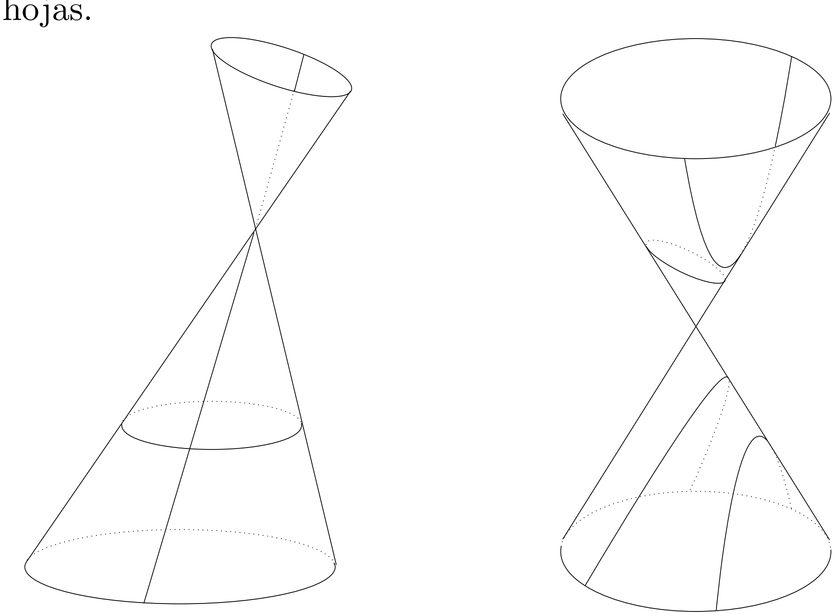
TEMA IV

Cónicas

4.1. Secciones cónicas

Definiciones informales

Comenzamos dando, sin mucho rigor, varias definiciones de cónicas y la relación entre ellas. Un cono circular es una superficie generada por una recta que se mueve de modo que siempre corte a una circunferencia dada y pase por un punto fijo, que no esté en el plano de la circunferencia. La recta engendradora se denomina generatriz del cono, la circunferencia dada directriz y el punto fijo se llama vértice, el cual divide a cada generatriz en dos semirectas y al cono en dos hojas.



Las curvas llamadas elipse, hipérbola y parábola, reciben su nombre debido a Apolonio, quién las estudió como ciertas secciones planas de conos circulares. Es por lo que se le da el nombre de secciones cónicas o simplemente cónicas. Si el plano que corta al cono no pasa por su vértice se obtiene una cónica propiamente dicha o no degenerada: una elipse (incluyendo la circunferencia como caso especial) es una cónica cuyo plano de sección corta a todas las generatrices de una hoja del cono, una hipérbola es una cónica cuyo plano de sección corta a ambas hojas del cono y una parábola es una cónica cuyo plano de sección es paralelo a una y sólo a una generatriz del cono.

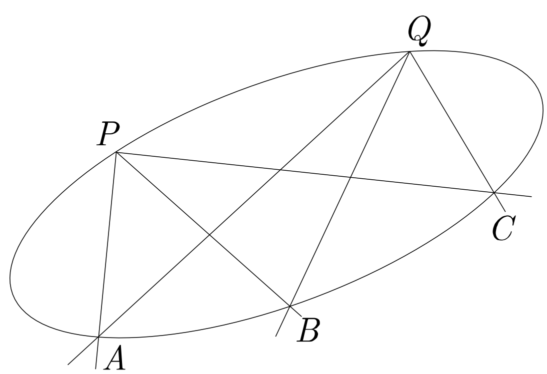
Si el plano secante pasa por el vértice, las secciones resultantes (denominadas ahora cónicas degeneradas) son rectas: distintas, confundidas o imaginarias (con un punto real).

Es un hecho notable que toda cónica es siempre una sección de conos circulares rectos (esto es, conos circulares tales que la recta que une el vértice con el centro de la circunferencia directriz es perpendicular al plano de ésta); realmente todas pueden hallarse como secciones de un cono circular dado. Utilizando este hecho se tienen los siguientes resultados (ver pág. 91) que pueden ser tomados como definiciones:

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija situados en el plano.



Pasemos ahora a enunciar unas caracterizaciones puramente proyectivas de las cónicas, las cuales también podemos tomar como definiciones:

Definición de Charles–Steiner: Una cónica no degenerada es el lugar geométrico de los puntos del plano de intersección de las rectas homólogas de dos haces proyectivos no perspectivos, es decir, en los que la recta que une los vértices de los haces no se corresponde por dicha proyectividad.

Finalmente, también se define una cónica no degenerada (ver pág. 81) como el lugar geométrico de los puntos autoconjugados en una polaridad hiperbólica (o sea, una correlación involutiva con puntos autoconjugados).

Todas estas definiciones equivalentes de cónica no degenerada que hemos citado, las relacionaremos a lo largo de este tema (pág. 99, 91, 96). Ahora vamos a obtener sus ecuaciones analíticas partiendo de su definición como lugar geométrico y citar algunas de sus propiedades métricas. El Apéndice C está dedicado a dar algunos métodos para construir cónicas en el plano euclídeo.

Elipse

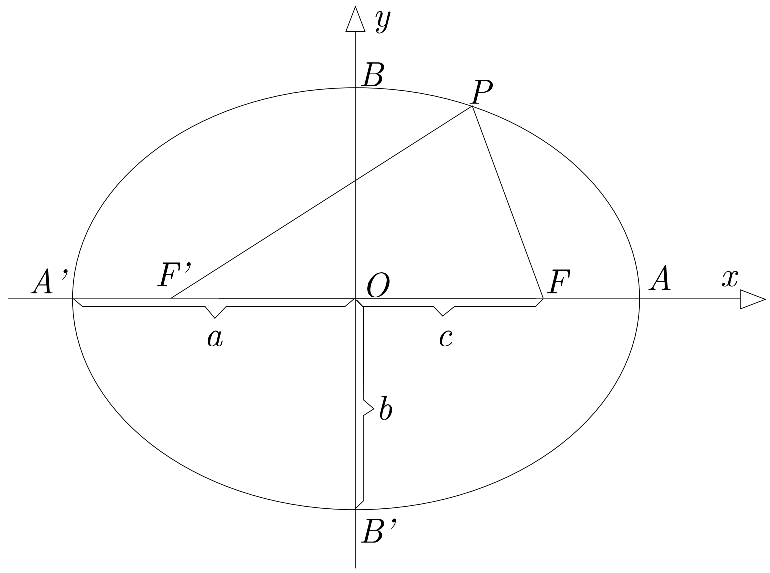
4.1. Definición.- *Se llama* elipse *al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados* focos, *es constante.*

Si adoptamos como eje de abscisas la recta que pasa por los focos F' y F y por eje de ordenadas la perpendicular en el punto medio O del segmento $\overline{F'F}$ y si ponemos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$ las coordenadas de los focos, (x, y) las de un punto P que describe el lugar geométrico y $2a$ la suma de distancias constante ($2a > 2c$), se tiene

$$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

de donde se deduce la ecuación del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$



De la que se obtiene después de eliminar radicales y sustituir $a^2-c^2=b^2$, la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

La curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (denominados, por ello, ejes de la elipse) y al origen de coordenadas (centro de la elipse). Queda encerrada en el rectángulo de lados $2a$ y $2b$.

A los puntos de intersección con los ejes OX y OY ($x=\pm a$ e $y=\pm b$) se les denominan vértices y al punto O centro.

Ecuaciones paramétricas de la elipse.- De la ecuación implícita de la elipse obtenida, teniendo en cuenta la identidad $\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi=1$, se deduce ($0\leq\varphi\leq 2\pi$)

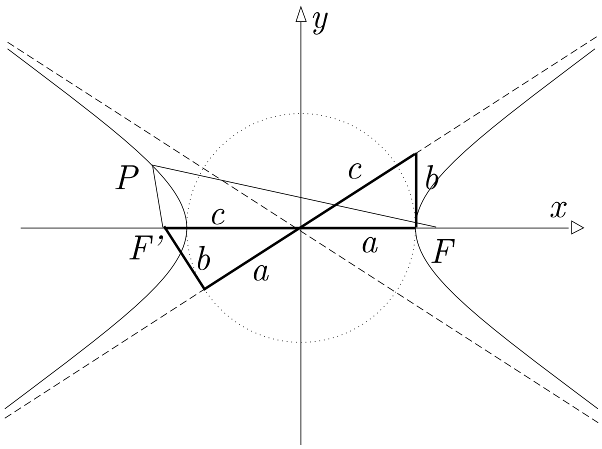
$$\boxed{x=a\cos\varphi,\qquad y=b\operatorname{sen}\varphi}$$

Y, poniendo $t=\operatorname{tag}\frac{\varphi}{2}$ ($-\infty<t<\infty$), tenemos las ecuaciones paramétricas racionales:

$$\boxed{x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=b\frac{2t}{1+t^2}}$$

Hipérbola

4.2. Definición.- *Se llama* hipérbola *al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F' y F, llamados* focos*, es constante.*



Adoptando el mismo sistema de ejes y la misma notación que para la elipse, la ecuación del lugar geométrico se escribe

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

siendo ahora $2a < 2c$, de la que al quitar radicales y poner $c^2 - a^2 = b^2$, resulta la ecuación de la hipérbola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

De esta ecuación se deduce que la curva es simétrica respecto a los ejes coordenados (ejes de la hipérbola) y al origen de coordenadas; y que tiene por asíntotas (tangentes en los puntos impropios), las rectas

$$y=\frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad y=-\frac{b}{a}x$$

A los puntos de intersección de la curva con el eje OX, $A'(-a,0)$, $A(a,0)$ se les llama vértices; y al punto O centro.

Si $a = b$, la hipérbola se llama equilátera, en este caso su ecuación se escribe

$$x^2 - y^2 = a^2$$

y las asíntotas son las rectas perpendiculares $y = x$ e $y = -x$.

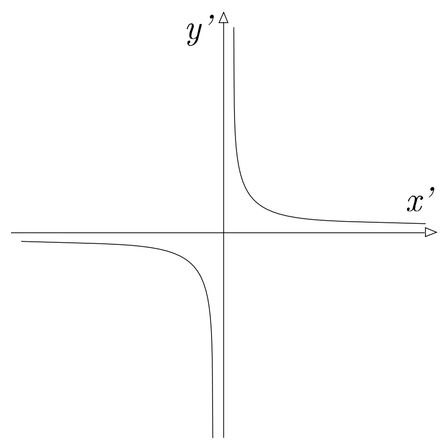
Adoptando como nuevos ejes coordenados las asíntotas, para lo cual es necesario hacer un giro de $-\pi/4$:

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}},$$

que al sustituir en $x^2 - y^2 = a^2$, resulta

$$x'y' = k \qquad \left(k=\frac{a^2}{2}\right)$$

como ecuación de una hipérbola equilátera referida a las asíntotas.



Ecuaciones paramétricas de la hipérbola.- Teniendo en cuenta la ecuación de la hipérbola, referida a sus ejes, y la identidad $\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1$, se deduce $(-\infty < \theta < \infty)$:

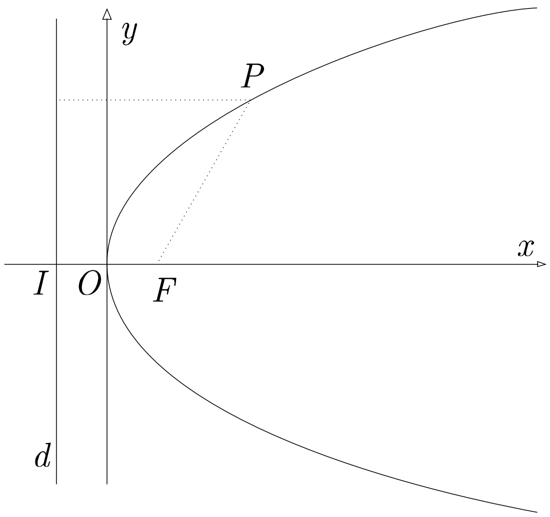
$$\boxed{x = a\cosh\theta, \qquad y = b\operatorname{senh}\theta}$$

Y poniendo $t = \operatorname{tagh}\frac{\theta}{2}$ $(-1 < t < 1)$ tenemos (*) las ecuaciones paramétricas racionales:

$$\boxed{x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = b\frac{2t}{1-t^2}}$$

Parábola

4.3. Definición.- *Se llama* parábola *al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado* foco, *y de una recta fija d, denominada* directriz.



Para obtener su ecuación tomaremos como eje de abscisas la perpendicular a la directriz que pasa por el foco, y por eje de ordenadas la mediatriz al segmento IF, cuya longitud designamos por p. Así las coordenadas del foco son $(p/2, 0)$ y si $P(x, y)$ designa un punto genérico del lugar, éste queda definido por la condición

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando se llega a la siguiente ecuación de la parábola

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Esta ecuación muestra que el eje OX es eje de simetría y se le denomina eje de la parábola.

Ecuación polar de las cónicas

Vamos ahora a obtener una ecuación común para la elipse, hipérbola y parábola, utilizando coordenadas polares en el plano. Para ello recordemos previamente la ecuación de la recta y la distancia de un punto a una recta en este sistema de coordenadas.

Ecuación de la recta en coordenadas polares, siendo d la distancia al origen, α es el ángulo que forma la normal a ella con el eje polar y (ρ, θ) las coordenadas de un punto genérico:

$$\rho\cos(\theta - \alpha) = d, \qquad \text{o bien} \qquad A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\rho}.$$

(*) $$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \qquad \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

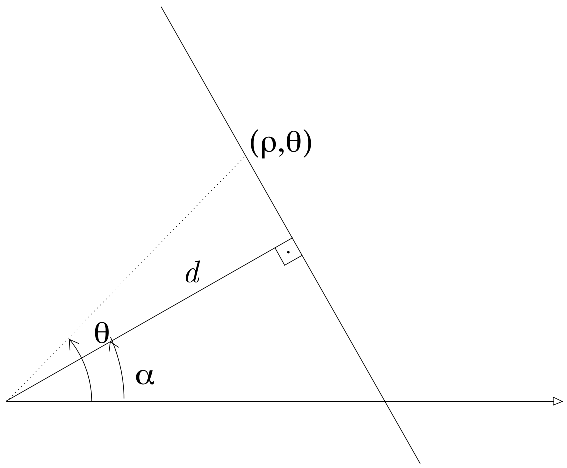
$$\operatorname{tagh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \qquad \coth\theta = \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1}\ (\theta \neq 0)$$

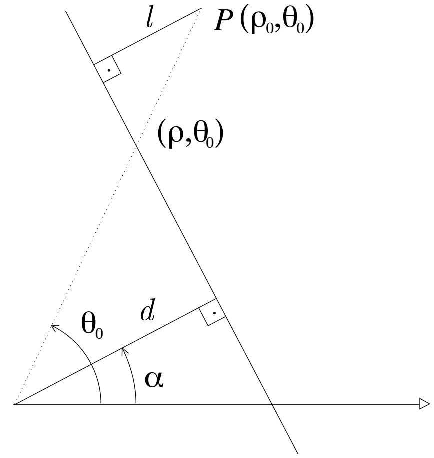
$$\operatorname{senh}(\alpha + \beta) = \operatorname{senh}\alpha\cosh\beta + \operatorname{senh}\beta\cosh\alpha$$

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta$$

$$\cosh 2\theta = \frac{1 + \operatorname{tagh}^2\theta}{1 - \operatorname{tagh}^2\theta} \qquad \operatorname{senh} 2\theta = \frac{2\operatorname{tagh}^2\theta}{1 - \operatorname{tagh}^2\theta}$$

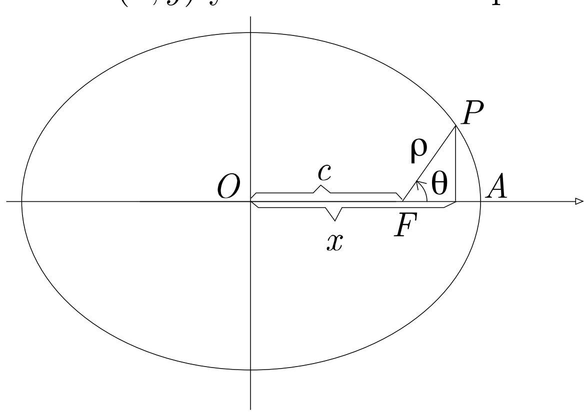
Distancia ℓ de un punto $P(\rho_0, \theta_0)$ a una recta $\rho\cos(\theta-\alpha)-d=0$:
$\ell=(\rho_0-\rho)\cos(\theta_0-\alpha)=\rho_0\cos(\theta_0-\alpha)-\rho\cos(\theta_0-\alpha)=\rho_0\cos(\theta_0-\alpha)-d$, basta entonces sustituir las coordenadas (ρ_0, θ_0) de P en la ecuación de la recta $\rho\cos(\theta-\alpha)-d=0$.





Pasemos ya a obtener dicha ecuación conjunta de las cónicas no degeneradas. Comencemos con la elipse:

Si tomamos el foco F como origen de coordenadas polares y la recta FA como eje polar, se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (ρ, θ) de un punto P de la elipse:



$$x-c=\rho\cos\theta$$
$$\rho=\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=$$
$$=\sqrt{(x-c)^2+b^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)}=$$
$$=\sqrt{(x-c)^2+(a^2-c^2)\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)}=$$
$$=\left|a-\frac{cx}{a}\right|=a-\frac{cx}{a},$$
pues $c<a$ y $|x|\leq a$

Eliminando x entre estas dos relaciones $x-c=\rho\cos\theta$ y $\rho=a-cx/a$, para lo cual basta sumarlas, después de multiplicar la primera por c/a, se tiene
$$\rho\left(1+\frac{c}{a}\cos\theta\right)=a-\frac{c^2}{a}=\frac{b^2}{a}$$
y haciendo $b^2/a=p,\ c/a=e$, resulta la ecuación polar
$$\boxed{\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

Para la hipérbola se tiene análogamente, $x-c=-\rho\cos\theta, \rho=-a+cx/a$; de donde, de igual forma que antes, se deduce la misma ecuación.

Finalmente, en la parábola resulta, $x-p/2=-\rho\cos\theta, \rho=x+p/2$; y restando una de otra se vuelve a encontrar la ecuación polar anterior para el valor particular $e=1$.

La razón $e = c/a$ recibe el nombre de excentricidad. Como en la elipse $c < a$, la excentricidad toma en esta curva un valor $e < 1$; para la hipérbola es $e > 1$; y para la parábola $e = 1$. Si en la ecuación de la elipse ponemos $a = b$, resulta $c^2 = b^2 - a^2 = 0$ y, por tanto, $e = c/a = 0$. La circunferencia aparece así como una elipse de excentricidad nula.

4.4. Proposición.- *Una cónica no degenerada (no circunferencia) se puede considerar como el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a un punto fijo llamado* foco *y a una recta fija llamada* directriz *es constante.*

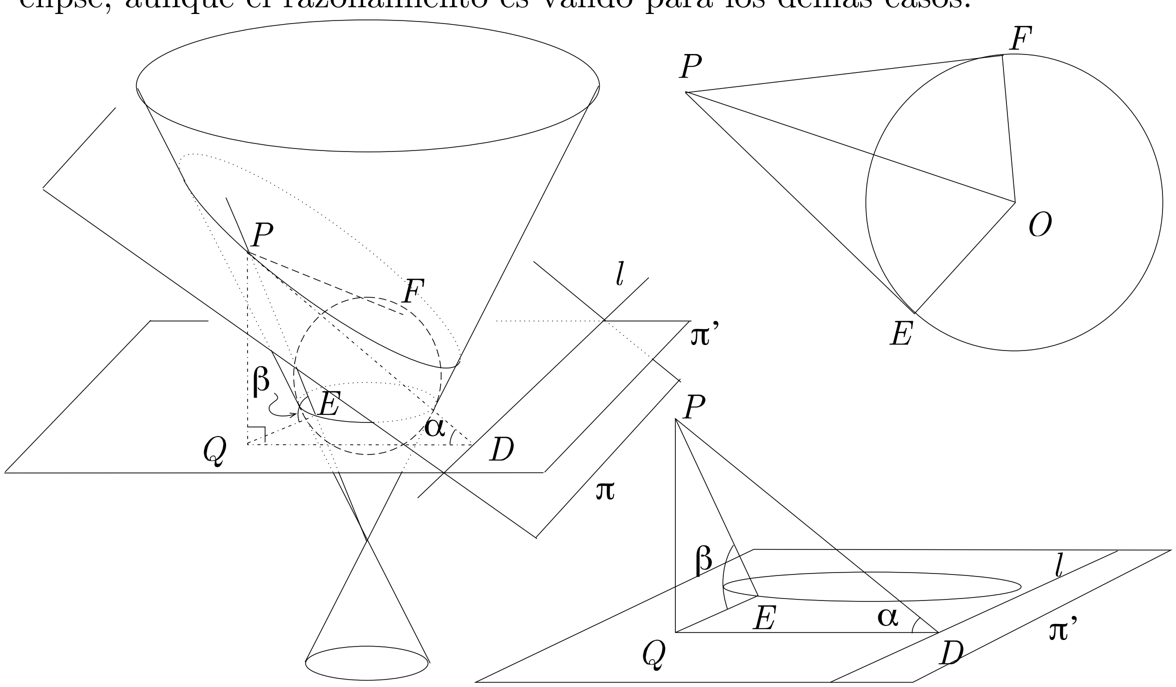
Demostración.- Si en la ecuación polar de una cónica ponemos $p = eq$, dicha ecuación puede ponerse de la forma

$$\frac{\rho}{-\rho\cos\theta + q} = e,$$

donde el numerador expresa la distancia de un punto fijo a un punto de la cónica y el denominador la distancia del punto de la curva a la recta $-\rho\cos\theta + q = 0$. De donde el resultado enunciado. $\boxdot$

Relación entre cónicas como lugares geométricos y secciones cónicas

La caracterización conjunta de elipse, hipérbola y parábola que acabamos de obtener, nos permite enlazar éstas, definidas como lugares geométricos en el plano, con las secciones cónicas que hemos mencionado al inicio de este tema. Tal conexión se aprecia fácilmente en la figura siguiente, que se refiere a la elipse, aunque el razonamiento es válido para los demás casos.



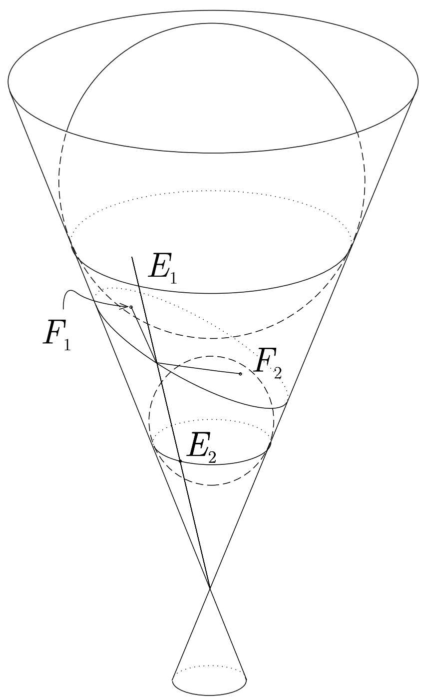
La esfera inscrita es tangente al cono a lo largo de una circunferencia $\mathcal{C}$ y al plano secante π en el punto F. El punto P designa un punto cualquiera de la sección, y vamos a ver que F es un foco y la recta ℓ, intersección del plano π' que contiene a la circunferencia citada $\mathcal{C}$ con el plano secante π, una directriz. Para ello designemos por Q el punto en el que la paralela por P al eje del cono (perpendicular al plano π') corta a π', y sea E el punto en donde la generatriz del cono que pasa por P encuentra a la circunferencia $\mathcal{C}$. Representemos por

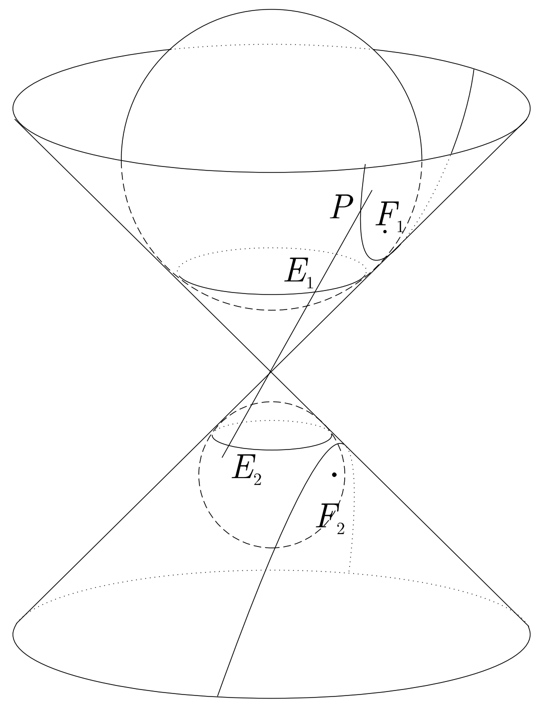
D el pie de la perpendicular trazada por P a la recta ℓ; $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son dos tangentes a la misma esfera desde P y tendrán la misma longitud, $\overline{PE} = \overline{PF}$. En los triángulos rectángulos PQE y PQD, se tiene respectivamente

$$\overline{PQ} = \overline{PE}\,\mathrm{sen}\,\beta, \qquad \overline{PQ} = \overline{PD}\,\mathrm{sen}\,\alpha, \quad \text{con lo que} \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}.$$

como α y β son constantes para un cono y plano secante dados, el cociente de distancias de un punto P de la sección cónica a un punto fijo F (foco) y a una recta ℓ (directriz) es constante ($\overline{PF} = e\overline{PD}$).

Según la posición del plano de corte respecto a las generatrices del cono, tenemos los siguientes casos:





a) Si el plano π es paralelo a una sola generatriz del cono, entonces $\alpha = \beta$ y $e = 1$. Se trata pues de una parábola ($\overline{PF} = \overline{PD}$).

b) Si el plano π corta a todas las generatrices de una hoja del cono, entonces $\alpha < \beta$ y $e < 1$. Se trata de una elipse,

$$\overline{PF_1} = \overline{PE_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{PE_2}, \quad \text{luego} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PE_1} + \overline{PE_2} = \overline{E_1E_2} = cte.$$

c) Si el plano π corta a ambas hojas del cono, entonces $\alpha > \beta$ y $e > 1$. Se trata de una hipérbola,

$$\overline{PF_1} = \overline{PE_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{PE_2}, \quad \text{luego} \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PE_1} - \overline{PE_2} = \overline{E_1E_2} = cte.$$

Como consecuencia de todo lo expuesto, podemos enunciar la siguiente proposición que en 1822 demostró Germinal Dardelin (1794–1847) y que enlaza las cónicas como secciones cónicas introducidas por Apolonio y como lugares geométricos, introducidas en el siglo XVII:

4.5. Proposición.- *Si dos esferas están inscritas en un cono circular de tal manera que son tangentes a un plano dado cortando al cono en una sección cónica, los puntos de contacto de las esferas con el plano son los focos de la sección cónica y las intersecciones del plano secante con los planos que contienen a las circunferencias, a lo largo de las cuales las esferas tocan al cono, son las directrices de la cónica.* ⊡

4.2. Cónicas en general

Las ecuaciones obtenidas en la sección anterior para la elipse, hipérbola y parábola, pasadas a coordenadas homogéneas resultan ser un polinomio homogéneo de segundo grado en las variables x^0, x^1, x^2. Si se cambia de sistema de referencia dichas ecuaciones siguen siendo polinomios homogéneos de segundo grado. Esto nos da pie para dar la siguiente definición general de cónica en el plano proyectivo real:

4.6. Definición.- *Se llama* cónica *al lugar geométrico de los puntos reales o imaginarios cuyas coordenadas homogéneas, con respecto a un sistema de referencia proyectivo, satisfacen a una ecuación de segundo grado (forma cuadrática ternaria) del tipo*

$$f((x^0,x^1,x^2)) =$$
$$a_{00}(x^0)^2+a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{01}x^0x^1+2a_{02}x^0x^2+2a_{12}x^1x^2=0.$$

Damos, a continuación una serie de expresiones de este polinomio que utilizaremos en lo sucesivo:

$$f((x^0,x^1,x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^ix^j = 0. \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

Sacando factor común las variables x^0, x^1, x^2 y poniendo

$$\begin{aligned} f_{x^0} &= a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 \\ f_{x^1} &= a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 \\ f_{x^2} &= a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2, \end{aligned}$$

resulta la siguiente expresión de la ecuación de la cónica:

$$x^0 f_{x^0} + x^1 f_{x^1} + x^2 f_{x^2} = 0.$$

También podemos expresar la ecuación de la cónica en forma matricial como sigue:

$$(x^0x^1x^2)\begin{pmatrix} f_{x^0} \\ f_{x^1} \\ f_{x^2}\end{pmatrix} = 0, \qquad (x^0x^1x^2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2\end{pmatrix} = 0,$$

o abreviadamente

$$^{\mathrm{t}}XAX = 0,$$

donde A es una matriz simétrica de coeficientes reales (denominada matriz de la forma cuadrática f o matriz asociada a la ecuación de la cónica) y X denota una matriz columna formada por las coordenadas de los puntos de la cónica.

Si tenemos un cónica de ecuación $^{\mathrm{t}}XAX = 0$, *"después de un cambio de coordenadas proyectivas* $Y = MX$ *(*M *matriz regular; es decir, de determinante no nulo) la nueva ecuación de la cónica sigue siendo un polinomio de segundo grado homogéneo".* En efecto, sustituyendo en la ecuación de la cónica, las antiguas coordenadas en función de las nuevas resulta

$$^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}(M^{-1}Y)A(M^{-1}Y) = {}^{\mathrm{t}}Y({}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1})Y = 0,$$

que si denotamos por $B = {}^{\mathrm{t}}M^{-1}AM^{-1}$, resulta que ${}^{\mathrm{t}}B = B$; y si (B_{ij}) son sus componentes y (y^0, y^1, y^2) las coordenadas respecto al nuevo sistema, se tiene como nueva ecuación de la cónica el polinomio homogéneo de segundo grado:

$$\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} y^i y^j = 0 \qquad\qquad b_{ij} = b_{ji}.$$

Además, *"el rango de la matriz A asociada a una cónica se conserva por un cambio de coordenadas proyectivas (es decir, es un invariante proyectivo)"*. En efecto, por la propia definición del rango de una matriz en términos de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ que define, respecto a unas bases fijadas, y puesto que la dimensión del espacio imagen de dicha aplicación lineal no depende de las bases elegidas, resulta que

$$rango\ B = rango({}^{t}M^{-1}AM^{-1}) = rango\ A.$$

Este hecho nos permite hacer la siguiente distinción entre las cónicas:

4.7. Definición.- *Diremos que una cónica es* degenerada *si el determinante de su matriz asociada es nulo; en caso contrario, diremos que la cónica es* no degenerada.

4.8. Definición.- *Un punto $P(p^0, p^1, p^2)$ que está a la cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^{t}XAX = 0$, para el que se verifica $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = 0$, se dice que es* singular.

Las únicas cónicas que tienen puntos singulares son las degeneradas, ya que es cuando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{x^0} &\equiv a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 = 0 \\ f_{x^1} &\equiv a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = 0 \\ f_{x^2} &\equiv a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 = 0 \end{aligned}$$

tiene solución no trivial.

Intersección de una recta con una cónica. Tangentes a una cónica

Para hallar los puntos de intersección de la cónica ${}^{t}XAX = 0$ con la recta que pasa por los puntos $P(p^0, p^1, p^2)$ y $Q(q^0, q^1, q^2)$, de ecuaciones paramétricas

$$x^0 = p^0 + \lambda q^0, \qquad x^1 = p^1 + \lambda q^1, \qquad x^2 = p^2 + \lambda q^2,$$

tenemos que resolver la ecuación en λ

$${}^{t}(P + \lambda Q)A(P + \lambda Q) = {}^{t}PAP + \lambda\,{}^{t}PAQ + \lambda\,{}^{t}QAP + \lambda^2\,{}^{t}QAQ = 0,$$

que en virtud de la simetría de A (${}^{t}A = A$), se tiene ${}^{t}PAQ = {}^{t}({}^{t}PAQ) = {}^{t}QAP$ y nos queda la ecuación

$$\lambda^2\,{}^{t}QAQ + 2\lambda\,{}^{t}PAQ + {}^{t}PAP = 0, \tag{4-1}$$

que es una ecuación de segundo grado en λ y si $\Delta = ({}^{t}PAQ)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}QAQ)$ es su discriminante, se tiene que:

1. Si ${}^{t}PAQ = 0$, ${}^{t}PAP = 0$ y ${}^{t}QAQ = 0$; es decir, si los coeficientes de la ecuación (4-1) son todos nulos, ésta se satisface para todo λ, en consecuencia todos los puntos de la recta PQ están en la cónica; es decir, la recta forma parte de la cónica.

2. Si los tres coeficientes ${}^{t}PAQ$, ${}^{t}PAP$ y ${}^{t}QAQ$ no son todos nulos, la ecuación (4-1) tiene entonces dos raices que pueden ser reales y distintas, si $\Delta > 0$; reales y confundidas, si $\Delta = 0$; o imaginarias conjugadas, si $\Delta < 0$. O sea:

   (a) Si $\Delta > 0$, la cónica y la recta tienen dos puntos (reales y distintos) en común. Se dice entonces que la recta y la cónica son secantes.

   (b) Si $\Delta = 0$, la recta y la cónica tienen en común un único punto real (doble). Se dice que la recta es tangente a la cónica.

   (c) Si $\Delta < 0$, la ecuación (4-1) tiene dos raices imaginarias conjugadas y por consiguiente la recta y la cónica no tienen puntos comunes (reales). Se dice que la recta es exterior a la cónica.

- Si el punto P pertenece a la cónica, se tiene ${}^{t}PAP = 0$ y la ecuación (4-1) admite una raiz $\lambda = 0$. Para que la recta PQ sea tangente en el punto P el segundo punto de intersección debe coincidir con P y por tanto la segunda raiz debe ser también nula, lo que implica que sea ${}^{t}PAQ = 0$. Reemplazando en esta condición las coordenadas (q^0, q^1, q^2) de Q por las (x^0, x^1, x^2) de un punto genérico de la recta, resulta la ecuación de la recta tangente a la cónica en el punto P:

$$\boxed{f_{p^0}\, x^0 + f_{p^1}\, x^1 + f_{p^2}\, x^2 = 0}$$

siempre que no sea $f_{x^0} = f_{x^1} = f_{x^2} = 0$ (es decir, que P no sea singular), ya que entonces todos los puntos del plano satisfacerían dicha ecuación.

La anulación del coeficiente ${}^{t}PAQ$ puede ocurrir también cuando la recta PQ está contenida en la cónica, por lo que dicha ecuación puede representar una recta que pasa por P y sus puntos están en la cónica.

Como conclusión podemos enunciar:

4.9. Proposición.- *Una recta y una cónica pueden tener comunes dos puntos, uno sólo o ninguno, o la recta forma parte de la cónica.* ⊡

- Supongamos ahora que P es un punto no perteneciente a la cónica; para que la recta PQ corte a la cónica en dos puntos confundidos se necesita que la ecuación (4-1) tenga una raiz doble, o sea que su discriminante sea nulo:

$$({}^{t}PAQ)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}QAQ) = 0,$$

pero como la recta PQ también se puede determinar por el punto P y cualquier otro de ella, resulta que

$$\boxed{({}^{t}PAX)^2 - ({}^{t}PAP)({}^{t}XAX) = 0}$$

representa el par de tangentes a la cónica desde el punto P.

- *"Si P es un punto singular y el punto Q es otro punto cualquiera de la cónica, la recta determinada por ellos está enteramente contenida en la cónica"*. En efecto, los tres coeficientes de la ecuación (4-1) son en este caso nulos.

- *"Si P y Q son ambos singulares, la recta PQ tiene todos sus puntos singulares"*. En efecto, si el sistema de ecuaciones lineales que da los puntos singulares de una cónica (pág.94) tiene dos soluciones, también será verificado por una combinación lineal de dichas soluciones.

Realmente, la cónica consiste en dicha recta (doble) de puntos singulares.

Polaridad respecto a una cónica. Ecuación tangencial de una cónica

Hemos visto ya (pág. 81) que los puntos autoconjugados en una polaridad satisfacen a una ecuación de segundo grado homogénea, es decir que el lugar geométrico descrito por ellos es una cónica en el sentido de la Definición 4.6. A continuación veremos como una cónica permite definir una polaridad en el plano, cuyos puntos autoconjugados forman la cónica dada (si ésta es real y no degenerada).

Comenzamos dando una definición puramente algebraica:

4.10. Definición.- *Si $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^tXAX = 0$ es la ecuación de una cónica y $P(p^0, p^1, p^2)$ un punto del plano, a la recta de ecuación*

$$\boxed{f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 = 0,}$$

se le denomina recta polar *de P, respecto a la cónica.*
Se llama polo *de una recta respecto a la cónica, a un punto cuya recta polar es la recta dada.*

Si la cónica es no degenerada, todo punto tiene una única recta polar. Pues, la unicidad es evidente, al ser $|A| \neq 0$; y sólo dejaría de existir dicha polar si $f_{p^0} = f_{p^1} = f_{p^2} = 0$, es decir si P es un punto singular, de los cuales carece una cónica no degenerada.

Si la cónica es degenerada, para puntos singulares la polar no está definida y la polar de cualquier otro punto del plano pasa por los puntos singulares de la cónica, ya que si sustituimos las coordenadas de un punto $Q(q^0, q^1, q^2)$ singular en la ecuación de la polar de P, la verifica:

$$f_{p^0}q^0 + f_{p^1}q^1 + f_{p^2}q^2 = f_{q^0}p^0 + f_{q^1}p^1 + f_{q^2}p^2 = 0.$$

Consecuencia inmediata de estas definiciones y de la simetría de la matriz asociada a la cónica, se tiene:

4.11. Proposición.- *Las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de esta recta.*

Demostración.- La polar de un punto $P(p^0, p^1, p^2)$ es $f_{p^0}x^0 + f_{p^1}x^1 + f_{p^2}x^2 = 0$, que en virtud de la simetría de los coeficientes de la cónica, también se puede escribir de la forma $f_{x^0}p^0 + f_{x^1}p^1 + f_{x^2}p^2 = 0$; lo que quiere decir que P está en la polar de cualquier punto de su recta polar. $\boxdot$

De la expresión, que hemos deducido anteriormente, para la ecuación de la recta tangente a la cónica en uno de sus puntos, se sigue que se trata de la polar de dicho punto. De hecho se tiene el siguiente resultado:

4.12. Proposición.- *Si un punto pertenece a su polar es un punto de la cónica y, recíprocamente, todo punto de la cónica pertenece a su polar.* $\boxdot$

Damos ahora una interpretación geométrica de recta polar, mediante el siguiente resultado:

4.13. Proposición.- *Los puntos conjugados armónicos de un punto P respecto a los pares de puntos en que las rectas que pasan por él cortan a una cónica dada, están sobre la recta polar de P.*

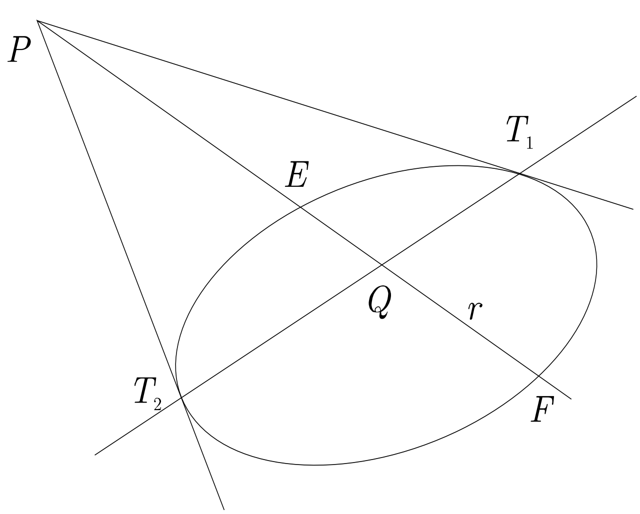
Demostración.- Sea una recta r que pasa por P y que corta a la cónica en los puntos E y F, y sea Q el punto conjugado armónico de P respecto a E y F. Tomemos sobre la recta r un sistema de coordenadas homogéneas respecto al cual $P(1,0), Q(0,1), E(1,\lambda'), F(1,\lambda'')$, siendo λ', λ'' las raices de la ecuación (4-1) que da los puntos E y F, respectivamente, de intersección de r con la cónica; se tiene entonces

$$(PQEF) = -1 \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda'' \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda'' \end{vmatrix}} = \frac{\lambda'}{\lambda''} = -1 \Rightarrow \lambda' + \lambda'' = 0,$$

lo cual quiere decir que el coeficiente de λ en dicha ecuación (4-1) es nulo, es decir, ${}^{t}PAQ = 0$, o lo que es lo mismo

$$f_{p^0} q^0 + f_{p^1} q^1 + f_{p^2} q^2 = 0.$$

con lo que Q está en la polar de P. $\boxdot$

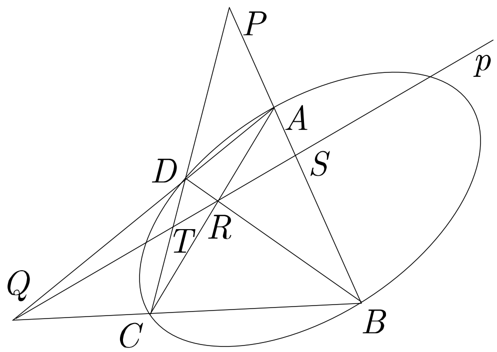


Observemos que si adoptomamos como definición de recta polar el lugar geométrico de los puntos conjugados armónicos de P respecto a aquellos en que cualquier recta que pase por él corta a la cónica, podría no formar toda la recta polar, pues puede haber rectas que pasan por P que no cortan a la cónica y sin embargo cortan siempre a la recta polar.

Las polares de los puntos T_1, T_2 de intersección de la polar de P con la cónica, siempre que existan, son las tangentes a la cónica en dichos puntos y tienen que pasar por P, por la Proposición 4.11.

Así, la polar de un punto queda determinada por los puntos de intersección con la cónica de las tangentes a ella desde dicho punto.

Daremos ahora una construcción geométrica de la polar de un punto respecto a una cónica dada; para ello haremos uso de la Proposición 2.36., de la página 51, relativa a la construcción del cuarto armónico:



Por un punto dado P se trazan dos rectas, que intersecan a la cónica en dos pares de puntos A, B y C, D, respectivamente. *La polar de P pasa por los dos puntos diagonales R y Q del cuadrivértice $ABCD$.* En efecto, aplicando la Proposición 2.36. al cuadrivértice $DRCQ$, se tiene que P y S están separados armónicamente de A y B, y también P y T de D y C; luego S y T están en la polar de P, que es la diagonal QR.

Observemos que para cada punto diagonal de $ABCD$ su polar es la diagonal que no pasa por él. Esto nos da pie para dar la siguiente definición, que utilizaremos posteriormente en la clasificación de cónicas.

4.14. Definición.- *Un triángulo se llama* autopolar *respecto a una cónica si cada lado es la polar del vértice opuesto.*

La correspondencia que hemos definido entre puntos y sus polares nos permite definir una polaridad asociada a cada cónica, cuando ésta es no degenerada, es decir, cuando la matriz asociada a su ecuación ${}^{t}XAX = 0$ tiene determinante no nulo ($|A| \neq 0$).

Los coeficientes (u_0, u_1, u_2) de la recta polar de un punto (x^0, x^1, x^2), vienen dados por las relaciones $\lambda u_0 = f_{x^0},\ \lambda u_1 = f_{x^1},\ \lambda u_2 = f_{x^2}$, es decir:

$$\begin{aligned}\lambda u^0 &= a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2\\ \lambda u^1 &= a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2\\ \lambda u^2 &= a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2\end{aligned}$$

Se trata de una correspondencia biyectiva entre los puntos y rectas del plano cuya matriz asociada es simétrica, por tanto se trata de una polaridad, denominada polaridad asociada a la cónica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$; la inversa viene dada por las ecuaciones, que nos da las coordenadas (x^0, x^1, x^2) del polo de la recta de coeficientes (u_0, u_1, u_2)

$$\begin{aligned}\rho x^0 &= A^{00}u_0 + A^{01}u_1 + A^{02}u_2\\ \rho x^1 &= A^{01}u_0 + A^{11}u_1 + A^{12}u_2\\ \rho x^2 &= A^{02}u_0 + A^{12}u_1 + A^{22}u_2\end{aligned}$$

donde $\rho = \lambda|A|$ y A^{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} en la matriz A.

4.15. Definición.- *Dos puntos son* conjugados *respecto a una cónica (respecto a la polaridad asociada a la cónica) si cada uno está en la polar del otro.*

4.16. Definición.- *Un punto se dice que es* autoconjugado *respecto a una cónica si está en su polar.*

Es consecuencia de la Proposición 4.12. o de la condición analítica de puntos autoconjugados, que el lugar geométrico de los puntos autoconjugados en la polaridad asociada a una cónica es la propia cónica.

Para las cónicas no degeneradas existe una correspondencia biyectiva entre sus puntos y las polares en ellos, que son las tangentes. Por tanto, podemos dar la siguiente definición:

4.17. Definición.- *Se denomina* cónica tangencial *en el plano considerado como conjunto de rectas al lugar geométrico de todas las rectas tangentes a una cónica (puntual) no degenerada.*

Las definiciones duales de las últimamente dadas son:

4.18. Definición.- *Dos rectas son* conjugadas *respecto a una cónica (respecto a la polaridad asociada a la cónica) si cada una pasa por en el polo de la otra.*

4.19. Definición.- *Una recta se dice que es* autoconjugada *respecto a una cónica si contiene a su polo.*

Así mismo, podemos afirmar que el lugar geométrico de las rectas autoconjugadas en la polaridad asociada a una cónica de ecuación ${}^{t}XAX = 0$ es la cónica tangencial:

$$\sum_{i,j=0}^{2} A^{ij}u_iu_j = A^{00}u_0^2 + A^{11}u_1^2 + A^{22}u_2^2 + 2A^{01}u_0u_1 + 2A^{02}u_0u_2 + 2A^{12}u_1u_2 = 0.$$

Para más propiedades de una polaridad asociada a una cónica ver las páginas 81 y 83.

Cónicas en el sentido de Steiner

Vamos ahora a comparar las cónicas definidas analíticamente, como conjunto de puntos que anulan a un polinomio de segundo grado, con la definición de Steiner de cónica:

4.20. Definición [Steiner].- *El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas homólogas de dos haces proyectivos en el plano se denomina cónica.*

Si los haces son perspectivos, es decir si la recta que une los puntos base de ambos haces se corresponde en la proyectividad (Proposición 2.31*.), dicho lugar geométrico se compone del eje de perspectividad más la recta que une los puntos base, pues al corresponderse en la proyectividad, todos sus puntos pueden considerarse como puntos de intersección de rectas homólogas.

Siendo los haces perspectivos o no, si tomamos los puntos base de ambos como los puntos $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$ que forman parte de un sistema de referencia en el plano y si la ecuación de la proyectividad, que a una recta $x^1 + \lambda x^0 = 0$ del primer haz le corresponde una recta $x^2 + \lambda' x^0 = 0$ del segundo, se expresa por la ecuación

$$m\lambda\lambda' + n\lambda + p\lambda' + q = 0,$$

resulta que, eliminando λ y λ' entre estas tres ecuaciones, se tiene

$$m\frac{x^1}{x^0}\frac{x^2}{x^0} - n\frac{x^1}{x^0} - p\frac{x^2}{x^0} + q = 0,$$

por lo que el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas viene dado por aquellos cuyas coordenadas satisfacen a un polinomio homogéneo de segundo grado:

$$mx^1x^2 - nx^0x^1 - px^0x^2 + qx^0x^0 = 0,$$

que corresponde con la definición de cónica dada en la Definición 4.6.

Si los haces son perspectivos, a la recta $x^0 = 0$ le corresponde ella misma, con lo que la ecuación de la proyectividad queda de la forma

$$n\lambda + p\lambda' + q = 0.$$

De donde se obtiene que el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas es el eje de perspectividad $nx^1 + px^2 - qx^0 = 0$, junto con la recta $x^0 = 0$ que une los puntos base de los haces.

En cuanto al recíproco, es decir, si una cónica de ecuación $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^ix^j = 0$, se puede obtener como el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas de una cierta proyectividad entre haces, no es siempre cierto, puesto que esta ecuación analítica comprende cónicas sin puntos, cónicas de un solo punto y cónicas con una sola recta, las cuales no pueden definirse como puntos de intersección de haces proyectivos. No obstante, tenemos el siguiente resultado:

4.21. Proposición.- *Si una cónica real definida analíticamente en el plano proyectivo tiene tres puntos no alineados y no contiene a ninguna recta de las que pasan por estos puntos, es una cónica en el sentido de Steiner.*

Demostración.- Tomemos tres puntos de la cónica como base de un sistema de referencia del plano $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$; respecto a este sistema, la ecuación de la cónica queda

$$a_{01}x^0x^1 + a_{02}x^0x^2 + a_{12}x^1x^2 = 0.$$

Los coeficientes a_{01}, a_{02} y a_{12} deben ser no nulos por las hipótesis impuestas. Proyectando un punto cualquiera de la cónica $X(\xi^0,\xi^1,\xi^2)$ desde los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, se obtienen respectivamente las rectas

$$\xi^2x^1 - \xi^1x^2 = 0 \qquad \xi^2x^0 - \xi^0x^2 = 0,$$

que poniendo $\lambda = \xi^1/\xi^2$ y $\lambda' = \xi^0/\xi^2$, (ya que $\xi^2 \neq 0$, salvo en el caso que X coincida con los puntos base de los haces, $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$) resultan las rectas

$$x^1 - \lambda x^2 = 0 \qquad x^0 - \lambda' x^2 = 0.$$

Y como el punto $X(\xi^0,\xi^1,\xi^2)$ está en la cónica,

$$a_{01}\xi^0\xi^1 + a_{02}\xi^0\xi^2 + a_{12}\xi^1\xi^2 = 0,$$

o sea

$$a_{01}\lambda\lambda' + a_{02}\lambda' + a_{12}\lambda = 0,$$

que es la ecuación de la proyectividad biyectiva ($a_{12}a_{02} \neq 0$) entre los haces que desde los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ proyectan los puntos de la cónica dada.

En esta proyectividad, a la recta $x^2 = 0$ del primer haz, que pasa por $(0,1,0)$, le corresponde la recta tangente $a_{01}x^0 + a_{12}x^2 = 0$ a la cónica en el punto $(0,1,0)$. Y la recta $x^2 = 0$, considerada como del segundo haz, es la imagen de la recta tangente $a_{01}x^1 + a_{02}x^2 = 0$ a la cónica en el punto $(1,0,0)$. Quedando así completados los casos excluidos en la demostración correspondientes a los puntos de la cónica con $\xi^2 = 0$.

4.22. Nota.- En el caso en que la ecuación analítica de la cónica sea el producto de dos rectas distintas, también sería una cónica en el sentido de Steiner, para lo cual basta definir la proyectividad como la perspectividad que tiene los puntos base en una de las rectas y eje de perspectividad la otra recta.

4.23. Nota.- De la demostración de proposición anterior se sigue que para todo par de puntos de una cónica sirven de base de haces proyectivos para engendrar la cónica.

4.24. Ejercicio.- La tangente a una cónica no degenerada en uno cualquiera de los puntos base de dos haces proyectivos que la generen es la recta que pasa por dicho punto base y por el centro de perspectividad de ambos haces (concepto dual del eje de perspectividad, ver pág. 46).

El centro de perspectividad de los haces proyectivos que generan la cónica es el polo de la recta que une los puntos base de dichos haces.

El concepto de cónica tangencial en el sentido de Steiner se expresa de la forma siguiente:

4.25. Definición [Steiner].- *Se llama* cónica tangencial *al conjunto de rectas que unen puntos homólogos de dos rectas proyectivas.*

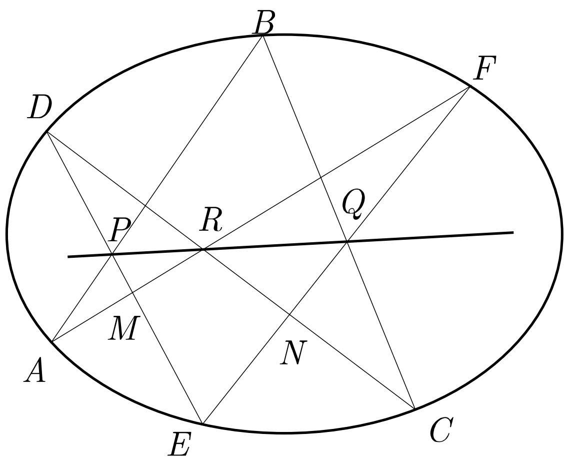
Si las rectas son perspectivas, es decir, si el punto O de intersección de ambas rectas se corresponde en la proyectividad, dicho conjunto de rectas se compone del haz de rectas de base en el centro de perspectividad y el haz de rectas con base en el punto O de intersección de ambas rectas.

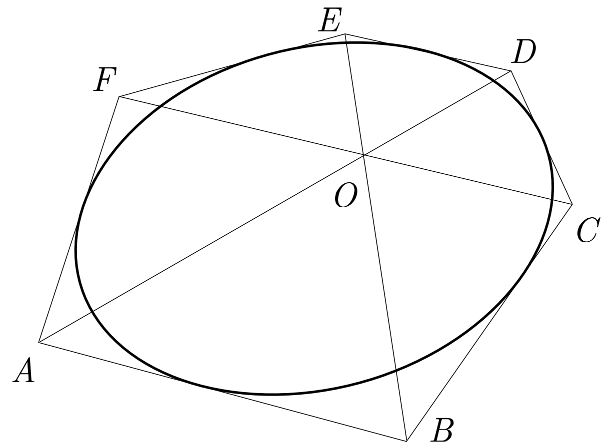
4.26. Ejercicio.- En una cónica tangencial no degenerada el eje de perspectividad (ver pág. 46) de las rectas proyectivas que la generan es la polar del punto de intersección de dichas rectas.

Una aplicación inmediata del concepto de cónica desde el punto de Steiner es el siguiente resultado relativo al exágono místico de Pascal, ver también el Apéndice A, página 178.

4.27. Proposición [Teorema de Pascal].- *Dado un exágono inscrito en una cónica los tres pares de lados opuestos se cortan en puntos de una misma recta, llamada* recta de Pascal.

Demostración.- Sea el exágono $ABCDEF$ inscrito en una cónica. Consideremos los haces proyectivos que desde A y C proyectan los puntos de la cónica. Cortemos el haz de base A por la recta ED y el de base C por la recta EF. Se tiene así una proyectividad $\sigma\colon ED \to EF$ en la que el punto E se corresponde con si mismo: se trata de una perspectividad. Otros pares de puntos homólogos en esta perspectividad son $P \mapsto Q, M \mapsto F, D \mapsto N$. Las rectas que unen puntos homólogos se cortan en el centro de perspectividad $R = MF \cap DN \cap PQ$. Luego los puntos P, Q y R están alineados. $\boxdot$





El resultado dual se enuncia así:

4.28. Proposición [Teorema de Brianchon].- *Dado un exágono circunscrito a una cónica, los tres pares de vértices opuestos determinan rectas que pasan por un mismo punto, llamado* punto de Brianchon. ⊡

4.3. Clasificación de las cónicas

Clasificación proyectiva de las cónicas

El rango de la matriz asociada $A = (a_{ij})$ a la ecuación de una cónica ${}^{t}XAX = 0$ es un invariante proyectivo (ver pág. 94), es por lo que el número de puntos singulares de una cónica no depende del sistema particular de coordenadas proyectivas que se tome. De acuerdo con esto, vamos a clasificar las cónicas con arreglo al número de puntos singulares y a su disposición. Recordemos que el sistema que da los puntos singulares es:

$$\begin{aligned} a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 = 0 \\ a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = 0 \\ a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 = 0 \end{aligned}$$

1. Si *rango* $A = 3$, el sistema no admite más que la solución $(0, 0, 0)$, que no representa ningún punto. Una cónica no degenerada no tiene puntos singulares.

2. Si *rango* $A = 2$, hay un solo punto cuyas coordenadas homogéneas satisfacen al sistema. Una recta que no pase por el punto singular tendrá dos puntos comunes con la cónica o ninguno, pues si tuviera uno sólo la cónica degeneraría en una recta doble con lo que el *rango* $A = 1$. Así la cónica y la recta tiene dos puntos comunes o ningunos; y la cónica se descompone en las rectas definidas por dichos puntos y el punto singular o sólo consta del punto singular.

3. Si *rango* $A = 1$, las ecuaciones son dependientes por lo que los puntos singulares son todos los de la recta determinada por una de las ecuaciones que no sea idénticamente nula, a la cual se reduce la cónica.

En resumen, según que el *rango* A sea 3, 2 ó 1 la cónica es no degenerada, degenerada en dos rectas con un punto común singular, o degenerada en una recta de puntos singulares.

Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano proyectivo real

Pretendemos ahora encontrar ecuaciones reducidas de las cónicas haciendo cambios de coordenadas proyectivas adecuados, ello nos permitirá precisar más sobre la clasificación proyectiva.

Sea $\mathcal{C}$ una cónica dada, P_0 un punto cualquiera del plano no perteneciente a la cónica y p_0 su polar respecto a la cónica. Ahora tenemos dos opciones:

$$A) \quad \exists P_1 \in p_0 \text{ y } \ P_1 \notin \mathcal{C}. \qquad\qquad B) \quad p_0 \subset \mathcal{C}.$$

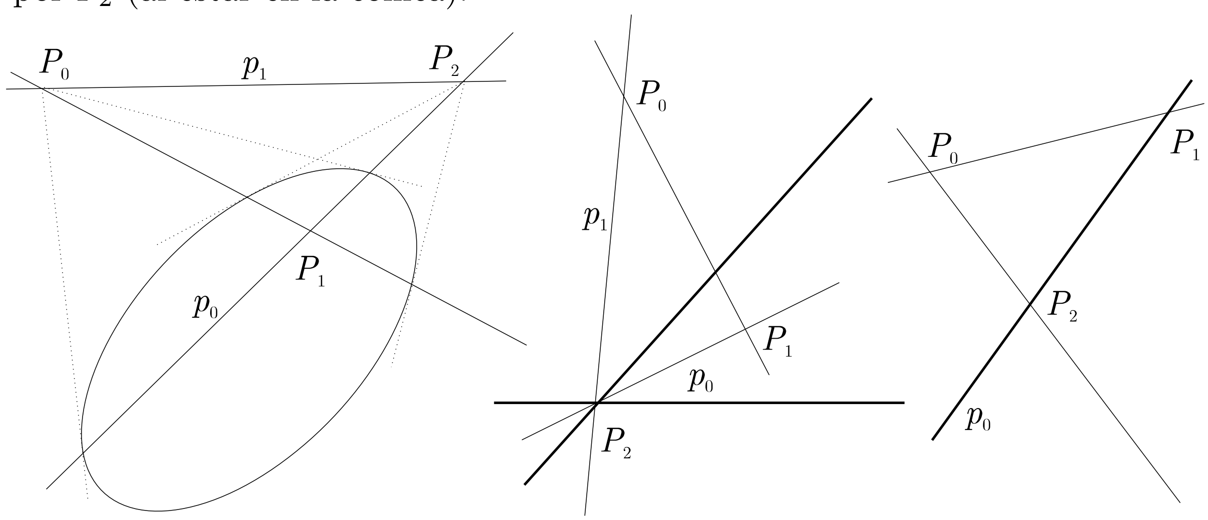
En el caso A), sea p_1 la polar de P_1 respecto a la cónica $\mathcal{C}$. Consideremos el punto $P_2 = p_0 \cap p_1$, que no está alineado con P_0 y P_1 (pues $P_0 \notin \mathcal{C}$ y $P_1 \notin \mathcal{C}$). Estos tres puntos $\{P_0, P_1, P_2\}$ constituyen, en consecuencia, un sistema de referencia proyectivo en el plano.

Dentro de la opción A) se presentan dos posibilidades:

$$A_1) \quad P_2 \notin \mathcal{C} \qquad\qquad A_2) \quad P_2 \in \mathcal{C}$$

En el caso A_1), los tres puntos P_0, P_1, P_2 forman un triángulo autopolar (cada vértice es el polo del lado opuesto).

En el caso A_2), P_2 es un punto singular: la polar de P_2 queda indeterminada, pues ella debe contener a P_0 y a P_1 (que no son puntos de $\mathcal{C}$) y además pasar por P_2 (al estar en la cónica).



Para estudiar la opción B), observemos que todos los puntos de p_0 son singulares, pues la polar de uno cualquiera de sus puntos debe ser ella misma y además pasar por P_0 ($P_0 \notin \mathcal{C}$); por tanto, queda indeterminada.

Eligiendo dos puntos distintos en p_0, sean P_1, P_2, obtenemos un sistema de referencia $\{P_0, P_1, P_2\}$, que no forma un triángulo autopolar.

Tomando los puntos $\{P_0, P_1, P_2\}$ como un nuevo sistema de referencia, para cualquiera de los tres casos, se obtiene una ecuación reducida de la cónica, que se denomina forma normal o diagonal, que en los casos reseñados queda como sigue:

A_1) Tomando $P_0(1,0,0)$ y su polar $p_0 \equiv x^0 = 0$, entonces $a_{01} = 0$ y $a_{02} = 0$.

Tomando $P_1(0,1,0)$ y su polar $p_1 \equiv x^1 = 0$ ($P_0 \in p_1$), resulta $a_{01} = 0$ y $a_{12} = 0$.

De todo ello resulta que $P_2 = p_0 \cap p_1$ $(0,0,1)$, su polar será $x^2 = 0$, luego $a_{02} = 0$ y $a_{12} = 0$.

La ecuación de la cónica queda:

$$a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0,$$

donde todos los coeficientes a_{00}, a_{11} y a_{22} son distintos de cero, pues la cónica no tiene puntos singulares.

A_2) Tomamos como en el caso A_1): $P_0(1,0,0)$, su polar $p_0 \equiv x^0 = 0$; $P_1(0,1,0)$, su polar $p_1 \equiv x^1 = 0$; y $P_2(0,0,1)$, cuya polar no está definida. De las dos primeras se sigue que $a_{01} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{02} = 0$, y de la última $f_{p_2^0}x^0 + f_{p_2^1}x^1 + f_{p_2^2}x^2 = 0$ ha de ser idénticamente nula, luego $a_{02} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$.

En consecuencia, la ecuación de la cónica en este particular sistema de coordenadas, toma la forma siguiente:

$$a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 = 0.$$

B) Tomando $P_0(1,0,0)$ y su polar $x^0 = 0$; $P_1(0,1,0)$ y $P_2(0,0,1)$ cuyas polares están indeterminadas, resulta: $a_{01} = 0, a_{02} = 0, a_{11} = 0, a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$. Con lo que la ecuación de la cónica queda:

$$a_{00}(x^0)^2 = 0.$$

En resumen, tenemos:

4.29. Proposición.- *La ecuación de una cónica no degenerada, respecto a un sistema de referencia proyectivo, cuyos puntos base forman un triángulo autopolar, se reduce a la* forma normal o diagonal

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0.$$

Si la cónica es degenerada, se puede reducir a una de las formas siguientes

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0 \qquad \text{ó} \qquad (x^0)^2 = 0.$$

⊡

Si hacemos cambios de referencias respecto a los cuales la matriz asociada a una cónica es diagonal, el número de términos no nulos en éstas es el mismo (por ser el rango de la matriz asociada a una cónica un invariante por transformaciones proyectivas — pág. 94 —). Y se verifica además:

4.30. Proposición [Ley de inercia de formas cuadráticas].- *Si m es el número de términos positivos (igual o mayor que el número de términos negativos), entonces la dimensión del mayor subespacio proyectivo que no tiene puntos comunes con la cónica es $m-1$.*

Demostración.- De acuerdo con las ecuaciones diagonales de las cónicas dadas por la proposición anterior, se presentan los siguientes casos:

I) Cónicas no degeneradas

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$$

Todos los coeficientes positivos: $\underline{m = 3}$.

Se trata de una cónica sin puntos reales (imaginaria), por lo que $\mathcal{F} = P_2(\mathbb{R})$ no tiene puntos comunes con la cónica y $\dim \mathcal{F} = 2 = m - 1$.

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 - a_2(x^2)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$$

Dos coeficientes positivos y uno negativo: $\underline{m = 2}$.

La recta $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^2 = 0\}$ es un subespacio de dimensión $1 = m-1$, que no tiene puntos comunes con la cónica. Y como la cónica tiene puntos del plano, por ejemplo $(\sqrt{a_2}, 0, \sqrt{a_0})$, no existen subespacios proyectivos de dimensión dos, que carezcan de puntos comunes con la cónica.

II) Cónicas degeneradas con matriz asociada de rango dos.

$$a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$$

Todos los coeficientes positivos: $\underline{m = 2}$.

La recta $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^2 = 0\}$ no interseca a la cónica y $\dim \mathcal{F} = 1 = m - 1$; con lo que no hay subespacios de dimensión dos sin puntos comunes con la cónica, pues el punto $(0, 0, 1)$ pertenece a ésta.

$$a_0(x^0)^2 - a_1(x^1)^2 = 0 \qquad (a_0 > 0,\ a_1 > 0)$$

Un coeficiente positivo y otro negativo: $\underline{m = 1}$.

El punto $\mathcal{F} = \{(x^0, x^1, x^2)/x^0 = 0, x^1 = 0\}$ no está en la cónica y $\dim \mathcal{F} = 0 = m - 1$. Además, como la recta $\mathcal{L} = \{(x^0, x^1, x^2)/\sqrt{a_0}x^0 = \sqrt{a_1}x^2\}$ forma parte de la cónica, cualquier otra recta (subespacio de dimensión 1) tiene al menos un punto común con la cónica (dos rectas en el plano proyectivo tienen siempre un punto común).

III) Cónicas degeneradas con matriz asociada de rango uno.

$(x^0)^2 = 0$. Sólo un coeficiente positivo: $\underline{m = 1}$

Como en el caso anterior, el mayor subespacio que no tiene puntos comunes con la cónica es de dimensión cero: existen puntos no pertenecientes a la cónica, por ejemplo el $(1, 0, 0)$; y, como la recta $x^0 = 0$ está en la cónica, toda otra recta (subespacio de dimensión uno) tiene puntos comunes con la cónica. $\boxdot$

Ahora podemos, de acuerdo a las ecuaciones reducidas, precisar más sobre la clasificación proyectiva de las cónicas:

≡ Cónicas no degeneradas (sin puntos singulares):

1. Si los coeficientes a_0, a_1, a_2 son del mismo signo, la cónica es imaginaria, sólo el $(0, 0, 0)$ satisface a la ecuación
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 = 0.}$$
2. Si hay uno de signo contrario a los otros dos, reordenando los índices si es necesario, se puede poner su ecuación diagonal de la forma:
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 - a_2(x^2)^2 = 0,}$$
con a_0, a_1 y a_2 positivos, que engloba las elipses, hipérbolas y parábolas.

≡ Cónicas degeneradas, con un punto singular:

3. Dos rectas imaginarias que se cortan en un punto real (singular).
$$\boxed{a_0(x^0)^2 + a_1(x^1)^2 = 0,}$$
con $a_0 > 0, a_1 > 0$.
4. Dos rectas reales distintas, con un punto singular.
$$\boxed{a_0(x^0)^2 - a_1(x^1)^2 = 0,}$$
con $a_0 > 0, a_1 > 0$.

$\equiv$ Cónica con una recta de puntos singulares:

5. $$\boxed{(x^0)^2 = 0}$$

Método de formación de cuadrados de Gauss

Hay otros procedimientos para llegar a la ecuación diagonal de una cónica y uno de ellos es el que se conoce con el método de formación de cuadrados de Gauss, que expondremos a continuación.

Sea $\mathcal{C}$ una cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j = 0$ referida a un cierto sistema de coordenadas homogéneas (x^0, x^1, x^2). Distinguiremos dos casos:

A) Supongamos que alguno de los coeficientes a_{ii} sea distinto de cero. Podemos suponer, cambiando si es necesario el orden de los puntos base, que es $a_{00} \neq 0$.

Los términos que tienen x^0 son:
$$a_{00}\left((x^0)^2 + 2x^0\left(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\right)\right) =$$
$$= a_{00}\left(\left(x^0 + \left(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\right)\right)^2 - \left(\frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2\right)^2\right).$$

Haciendo el cambio de coordenadas
$$\begin{aligned} \rho y^0 &= x^0 + \frac{a_{01}}{a_{00}}x^1 + \frac{a_{02}}{a_{00}}x^2 \\ \rho y^1 &= x^1 \\ \rho y^2 &= x^2 \end{aligned} \tag{4-2}$$
la ecuación de la cónica toma la expresión:
$$a_{00}(y^0)^2 + h(y^1, y^2) = 0,$$
siendo h un polinomio homogéneo de segundo grado en las variables y^1, y^2.

Procediendo de forma análoga con la ecuación $h((y^1, y^2)) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}y^i y^j = 0$, se llega a obtener la expresión diagonal buscada para la ecuación de la cónica.

La transformación final es el producto de transformaciones del tipo (4-2), que tienen determinante no nulo. Por tanto la transformación producto tiene determinante no nulo.

B) Si todos los coeficientes a_{ii} fuesen nulos, habría algún $a_{ij} \neq 0$, para $i \neq j$. Podemos suponer que sea a_{01}. Entonces empezaremos con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \rho x^0 &= y^0 - y^1 \\ \rho x^1 &= y^0 + y^1 \\ \rho x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

con lo que estaríamos en el caso anterior.

4.31. Nota.- Existen otros métodos basado en teoría de matrices que permiten pasar de una matriz simétrica, como es el caso de la asociada a la ecuación de una cónica, a otra con sólo términos en la diagonal principal. Uno de ellos es el que se conoce como el método de transformaciones elementales sobre una matriz, que consisten en:

1) Intercambiar filas o columnas.

2) Multiplicar los elementos de una fila o columna por una constante no nula.

3) Sumar a una fila o columna otra fila o columna, respectivamente, previamente multiplicada por una constante.

Mediante este método se trata de anular los elementos situados encima y debajo de la diagonal principal de una matriz A asociada a una cónica. Hay sólo que tener en cuenta que por ser una matriz simétrica, las transformaciones elementales que reducen a cero los elementos situados debajo de la diagonal principal son las mismas que sobre las columnas, reducen a cero los elementos situados encima de dicha diagonal.

Si sólo interesa la matriz diagonal resultante, la manera más rápida de obtenerla es hacer las transformaciones elementales convenientes (haciéndolas primero sobre las filas y luego sobre las columnas). Si además interesa conocer la matriz de cambio de referencia, ésta se obtiene simplemente aplicando las transformaciones elementales hechas a las columnas, sobre la matriz unidad, obteniéndose así la matriz de paso que expresa las coordenadas antiguas en función de las nuevas.

Clasificación afín de las cónicas

Situémonos ahora en el plano proyectivo deducido del plano afín real ampliado con los puntos impropios. Si hallamos la intersección de una cónica de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x^i x^j = 0$ con la recta impropia $x^0 = 0$, se tiene

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0;$$

resolviendo esta ecuación, después de dividir por $(x^1)^2$, resulta que la cónica tiene dos puntos impropios y, expresados en la forma $(0, 1, m)$, las pendientes de las rectas que los determinan $m = \dfrac{x^2}{x^1}$, son solución de la ecuación

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0,$$

esto es

$$m = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Dichos puntos serán reales (distintos o coincidentes) o imaginarios, según que la expresión $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A^{00}$ sea negativa, nula o positiva. También puede ocurrir que dicha ecuación sea satisfecha por todo m, en este caso la intersección de la cónica con la recta impropia es toda ésta.

Cuando la cónica es exterior a la recta impropia, por ser imaginarios sus puntos de intersección con ella ($A^{00} > 0$), se dice que es de género elipse; cuando la corta en dos puntos distintos ($A^{00} < 0$), se dice que es de género hipérbola; y si es tangente, por coincidir los dos puntos de intersección ($A^{00} = 0$), diremos que es de género parábola.

Cuando la ecuación $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j = 0$ no se satisface por las coordenadas de cualquier punto real, diremos que define una cónica imaginaria. Si cortamos una cónica imaginaria con la recta $x^0 = 0$, los puntos de intersección han de ser imaginarios, luego $A^{00} > 0$, por lo que sólo existen cónicas imaginarias de género elipse. Además debe ocurrir que las tangentes trazadas a una cónica imaginaria desde puntos de la recta impropia han de ser imaginarias, por lo que si trazamos las tangentes desde el punto impropio del eje x^1, por ejemplo, sus ecuaciones tangenciales son

$$A^{00}u_0^2 + 2A^{02}u_0u_2 + A^{22}u_2^2 = 0.$$

Y para que sean imaginarias tiene que ocurrir que $(A^{02})^2 - A^{00}A^{22} < 0$, pero como

$$\begin{vmatrix} A^{00} & A^{02} \\ A^{02} & A^{22} \end{vmatrix} = a_{11}|A| > 0;$$

tenemos así la condición para que una cónica sea imaginaria (ver también el Ejercicio 129):

$$A^{00} > 0 \qquad a_{11}|A| > 0.$$

En resumen, tenemos la clasificación de las cónicas en el plano afín que aparece en el cuadro de la página 113.

Ecuaciones reducidas de las cónicas en el plano afín real

Pretendemos ahora encontrar ecuaciones reducidas de las cónicas haciendo cambios de coordenadas en plano afin ampliado, ello nos permitirá precisar más sobre la clasificación afín.

Un camino para clasificar las cónicas desde el punto de vista proyectivo es encontrar la forma normal o diagonal a que puede reducirse su ecuación mediante transformaciones proyectivas u homográficas. Si en vez de considerar el grupo lineal proyectivo $PGL(2, \mathbb{R})$, se considera un subgrupo G del mismo, se presenta el problema de ver las formas normales a las que puede reducirse las ecuaciones de las cónicas mediante transformaciones de G. Ello equivale a clasificar las cónicas respecto del subgrupo G, pues dos cónicas serán equivalentes respecto de G si y sólo si pueden reducirse a la misma forma normal o diagonal.

Un caso particular, de gran interés y del cual nos ocupamos en este párrafo, resulta al considerar G como el grupo de transformaciones afines o afinidades.

Recordemos que una afinidad (pág. 65) es una homografía que conserva la recta impropia, $x^0 = 0$. Sus ecuaciones, por consiguiente, son de la forma

$$\begin{aligned} \rho y^0 &= x^0 \\ \rho y^1 &= \alpha_0^1 x^0 + \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 \qquad\qquad |\alpha_j^i| \neq 0. \\ \rho y^2 &= \alpha_0^2 x^0 + \alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 \end{aligned}$$

Dada una cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x^i x^j = 0$. Mediante una transformación afín conveniente (fácil de hallar, mediante el método de formación de cuadrados o el de transformaciones elementales, por ejemplo), esta ecuación puede llevarse a una de las formas siguientes:

A) $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 = b_0(y^0)^2 + 2b_1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2 \qquad a_1 \neq 0 \;\; a_2 \neq 0$

B) $a_1(y^1)^2 = b_0(y^0)^2 + 2b^1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2 \qquad a_1 \neq 0$

C) $0 = b_0(y^0)^2 + 2b^1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2.$

de donde

A) $a_1\left(y^1 - \frac{b_1}{a_1}y^0\right)^2 + a_2\left(y^2 - \frac{b_2}{a_2}y^0\right)^2 = \left(b_0 + \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2}\right)(y^0)^2$

B) $a_1\left(y^1 - \frac{b_1}{a_1}y^0\right)^2 = \left(b_0 + \frac{b_1^2}{a_1}\right)(y^0)^2 + 2b_2 y^0 y^2$

C) $0 = b_0(y^0)^2 + 2b_1 y^0 y^1 + 2b_2 y^0 y^2.$

Que podemos poner en una sola fórmula conjunta ($h = 0, 1, 2$):

$$\sum_{i=1}^{h} a_i\left(y^i - \frac{b_i}{a_i}y^0\right)^2 = c_0(y^0)^2 + 2y^0\left(\sum_{i=h+1}^{2} b_i y^i\right), \; c_0 = b_0 + \sum_{i=1}^{h}\frac{b_i^2}{a_i}.$$

Hagamos ahora las siguientes transformaciones no singulares:

$$\begin{aligned} \rho z^0 &= y^0 \\ \rho z^i &= -\frac{b_i}{a_i}y^0 + y^i \qquad\qquad 1 \leq i \leq h \\ \rho z^i &= y^i \qquad\qquad\qquad h+1 \leq i \leq 2 \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación de la cónica queda reducida a la forma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i(z^i)^2 = c_0(z^0)^2 + 2z^0\left(\sum_{i=h+1}^{2} b_i z^i\right) \qquad a_i \neq 0}$$

De donde surgen los tres casos:

I. $c_0 = 0, \quad b_i = 0 \qquad (i = h+1, \ldots, 2)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i (z^i)^2 = 0}$$

II. $c_0 \neq 0$ (podemos suponer que $c_0 > 0$), $\quad b_i = 0 \qquad (i = h+1, \ldots, 2)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i (z^i)^2 = c_0 (z^0)^2}$$

III. Algún b_i diferente de cero, podemos suponer que $b_{h+1} \neq 0$. Consideremos el cambio de coordenadas dado por la afinidad

$$\begin{aligned}
&\rho t^0 = z^0 \\
&\rho t^i = z^i && 1 \leq i \leq h \\
&\rho t^{h+1} = \frac{c_0}{2} z^0 + \sum_{i=h+1}^{2} b_i z^i \\
&\rho t^i = z^i && h+2 \leq i \leq 2
\end{aligned}$$

con lo que la ecuación de la cónica queda:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{h} a_i (t^i)^2 = 2 t^0 t^{h+1}}$$

Según los distintos valores de h tenemos los siguientes tipos de cónicas:

1. (I_1) Para $h = 1$, $a_1 (z^1)^2 = 0$. Podemos suponer que $a_1 > 0$. Con lo que tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = 0} \qquad \text{Recta doble}$$

2. (I_2) Para $h = 2$ y a_1, a_2 del mismo signo ($a_1 > 0$ y $a_2 > 0$). Tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0} \qquad \text{Rectas imaginarias que con un punto real}$$

3. (I_3) Para $h = 2$ y a_1, a_2 de signo contrario ($a_1 > 0$ y $a_2 < 0$). Tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0} \qquad \text{Rectas secantes}$$

4. (II_1) Para $h = 0$, $\boxed{(x^0)^2 = 0}$ Recta impropia doble

5. (II_2) Para $h = 1$. Si $a_1 > 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Rectas paralelas}$$

6. (II_3) Para $h = 1$. Si $a_1 < 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 = -(x^0)^2} \ \text{Un punto impropio. Rectas imaginarias paralelas}$$

7. (II_4) Para $h = 2$. Si $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = -(x^0)^2} \qquad \text{Elipse imaginaria}$$

8. (II_5) Para $h = 2$. Si $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$ (o $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$), tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_2} z^2$$
$$(\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_2} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{-a_1} z^2 \ ) :$$
$$\boxed{(x^1)^2 - (x^2)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Hipérbola}$$

9. (II_6) Para $h = 2$. Si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, tenemos, haciendo el cambio,
$$\rho x^0 = \sqrt{c_0} z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = \sqrt{a_2} z^2 \ :$$
$$\boxed{(x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^0)^2} \qquad \text{Elipse}$$

10. (III_1) Para $h = 0$, $\boxed{x^0 x^1 = 0}$ Una recta propia y la recta impropia

11. (III_2) Para $h = 1$, si $a_1 > 0$, hacemos el cambio,
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = z^2$$
y si $a_1 < 0$, hacemos el cambio
$$\rho x^0 = z^0 \qquad \rho x^1 = \sqrt{-a_1} z^1 \qquad \rho x^2 = -z^2 \qquad \text{resulta:}$$
$$\boxed{(x^1)^2 = 2x^0 x^2} \qquad \text{Parábola}$$

Resumiendo lo expuesto tenemos los cuadros siguientes:

ECUACION REDUCIDA DE LAS CONICAS EN EL PLANO AFIN

(Según la naturaleza de los puntos impropios)

Rango de A^{00} ↓	Puntos impropios	Rango de A → 3	2	1
2	Imaginarios ($A^{00} > 0$)	$x^2 + y^2 = 1$ $-x^2 - y^2 = 1$	$x^2 + y^2 = 0$	****
	Reales ($A^{00} < 0$)	$x^2 - y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 0$	****
1	Punto doble ($A^{00} = 0$)	$x^2 - 2y = 0$	$x^2 = 1$ $x^2 = -1$	$x^2 = 0$
0	Toda la recta	****	$x = 0$	****
	Recta doble	****	****	?

Rango de A^{00} ↓	Puntos impropios	Rango de A → 3	2	1
2	Imaginarios ($A^{00} > 0$)	ELIPSE REAL O IMAG. ($a_{11}\|A\| > 0$)	RECTAS IMAGINARIAS	****
	Reales ($A^{00} < 0$)	HIPÉRBOLA	DOS RECTAS	****
1	Punto doble ($A^{00} = 0$)	PARÁBOLA	RECTAS PARALELAS REALES O IMAG.	RECTA DOBLE
0	Toda la recta	****	UNA RECTA (RECTA IMPR.)	****
	Recta doble	****	****	(RECTA IMPROPIA DOBLE)

4.4. Elementos afines y métricos de una cónica

Centro, diámetros, asíntotas y ejes

Sea una cónica no degenerada en el plano afín amplicado con la recta impropia de ecuación $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^tXAX = 0$.

4.32. Definición.- *Se llama* centro *al polo de la recta impropia, cuando es propio.*

Esta definición está justificada por el hecho de este punto separa armónicamente a cualquier punto de la recta impropia de los dos de intersección de una recta que pasa por él con la cónica.

Para determinar el centro C, observemos que la ecuación de su polar $f_{c^0}x^0 + f_{c^1}x^1 + f_{c^2}x^2 = 0$, es la recta impropia si y sólo si $f_{c^1} = f_{c^2} = 0$, ya que esta condición implica que $f_{c^0} \neq 0$; pues si $f_{c^0} = 0$, como $|A| \neq 0$, se tendrá

$(c^0, c^1, c^2) = (0,0,0)$. Con lo que obtendremos las coordenadas del centro C resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} a_{01}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 &= 0 \\ a_{02}x^0 + a_{12}x^1 + a_{22}x^2 &= 0 \end{aligned}$$

que admite la solución (A^{00}, A^{01}, A^{02}). Se sigue que las parábolas no tienen centro.

4.33. Definición.- *Se llama* diámetro *a la polar de un punto impropio cuando no es tangente a la cónica.*
Se llama asíntota *a la polar de un punto impropio cuando es una tangente propia.*

El diámetro correspondiente al punto $(0, 1, m)$ es $f_{x^1} + mf_{x^2} = 0$, por lo que pasa por el centro de la cónica, al anular éste a f_{x^1} y a f_{x^2}. La ecuación anterior desarrollada queda

$$(a_{01} + ma_{02})x^0 + (a_{11} + ma_{12})x^1 + (a_{12} + ma_{22})x^2 = 0$$

que representa una asíntota o un diámetro según que contenga o no a su polo, es decir según que la expresión

$$(a_{11} + ma_{12})1 + (a_{12} + ma_{22})m = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2$$

sea nula o distinta de cero. Por lo que las asíntotas son las rectas que pasan por el centro y de pendiente m dada por la ecuación

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0.$$

4.34. Definición.- *Se dice que dos diámetros son* conjugados *respecto de la cónica cuando cada uno contiene al polo del otro.*

Los polos de dos diámetros conjugados son pues los puntos impropios de dichos diámetros.

Si la polar del punto impropio $(0, 1, m)$ pasa por otro punto impropio $(0, 1, m')$, se tendrá

$$a_{11} + a_{12}(m + m') + a_{22}mm' = 0,$$

que es la ecuación de una involución, denominada involución de diámetros conjugados. En el caso de la elipse, es elíptica y en él de la hipérbola, es hiperbólica y las rectas dobles son las asíntotas.

Si nos situamos ahora en el plano euclídeo, podemos dar la siguiente

4.35. Definición.- *Los rayos rectángulares de la involución de diámetros conjugados se llaman* ejes.

Ellos son ejes de simetría ortogonal de la cónica; su ecuación se obtiene, para el caso de ejes coordenados ortogonales, poniendo $m' = -\dfrac{1}{m}$ en la ecuación de la involución anterior, resultando la ecuación

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0,$$

que nos da la dirección de los ejes, los cuales quedan completamente determinados por la condición de pasar por el centro.

Cuando la cónica sea de género parábola no existe involución de diámetros conjugados, ya que todos son paralelos, al no tener centro propio, y por tanto falla el razonamiento anterior; pero uno de estos diámetros debe ser el eje, y a causa de la simetría ortogonal que determina, el punto del infinito de cualquier recta perpendicular a él, y el punto donde le corte esta recta estarán armónicamente separados por el par de puntos de intersección de dicha recta con la cónica; por tanto, considerando la dirección $(0, a_{12}, a_{22})$, perpendicular a la de los diámetros, $(0, a_{22}, -a_{12})$, su polar será el eje buscado. La ecuación del eje de la parábola es pues

$$a_{12}f_{x^1} + a_{22}f_{x^2} = 0.$$

Finalmente definimos los vértices como los puntos de intersección de los ejes con la cónica.

En el párrafo §4.5. estudiaremos las ecuaciones de las cónicas en el plano euclídeo referidas a sus ejes.

Focos

Utilizando el hecho (pág. 83) de que la polaridad asociada a una cónica no degenerada induce sobre todo punto del plano, no perteneciente a ella, una involución de rectas conjugadas, damos la siguiente definición:

4.36. Definición.- *Los focos de una cónica son los puntos en los cuales la involución de rectas conjugadas es tal que a cada recta le corresponde la recta perpendicular (involución rectangular)*

La ecuación de tal involución debe ser entonces $mm' + 1 = 0$ y en ella las rectas dobles (autoconjugadas) son las tangentes a la cónica; que tienen, en consecuencia, pendientes i y $-i$.

Procedemos ahora a determinar las coordenadas de los focos de una cónica. Para ello utilizaremos la ecuación tangencial de la cónica

$$A^{00}u_0^2 + A^{11}u_1^2 + A^{22}u_2^2 + 2A^{01}u_0u_1 + 2A^{02}u_0u_2 + 2A^{12}u_1u_2 = 0.$$

Una recta que pase por el foco $F(\alpha^1, \alpha^2)$ tiene por ecuación

$$x^2 - \alpha^2 = m(x^1 - \alpha^1)$$

y sus coordenadas tangenciales son $(\alpha^2 - m\alpha^1, m, -1)$, las cuales, si la recta es tangente a la cónica deben satisfacer la ecuación de la misma, de modo que al sustituir resultará

$$A^{00}(\alpha^2-m\alpha^1)^2+A^{11}m^2+A^{22}+2A^{01}m(\alpha^2-m\alpha^1)-2A^{02}(\alpha^2-m\alpha^1)-2A^{12}m=0$$

y, siendo estas tangentes de pendientes i y $-i$, habrá de ser esta ecuación equivalente a $m^2 + 1 = 0$, lo cual exige que el coeficiente de m^2 sea igual al del término independiente, y el de m debe ser nulo; así las coordenadas del foco $F(\alpha^1, \alpha^2)$, vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$A^{00}(\alpha^1)^2 + A^{11} - 2A^{01}\alpha^1 = A^{00}(\alpha^2)^2 + A^{22} - 2A^{02}\alpha^2$$
$$A^{00}\alpha^1\alpha^2 - A^{01}\alpha^2 - A^{02}\alpha^1 + A^{12} = 0,$$

o sea, que las ecuaciones que determinan los focos son:

$$\boxed{\begin{array}{c} A^{00}((\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2) - 2A^{01}\alpha^1 + 2A^{02}\alpha^2 + A^{11} - A^{22} = 0 \\ A^{00}\alpha^1\alpha^2 - A^{02}\alpha^1 - A^{01}\alpha^2 + A^{12} = 0 \end{array}}$$

Veamos ahora que este concepto de foco de una cónica coincide con el que hemos visto al introducir las cónicas como lugares geométricos en el plano euclídeo (§ 4.1.)

Sea F un punto tal que la involución de rectas conjugadas que la cónica induce sobre él es rectangular; entonces las pendientes de las tangentes a la cónica desde $F(\alpha^1, \alpha^2)$ satisfacen $m^2 + 1 = 0$, así su ecuación conjunta

$$\Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\Big)^2 - \Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i \alpha^j\Big)\Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j\Big) = 0,$$

debe coincidir con el producto de las rectas

$$x^2 - \alpha^2 + i(x^1 - \alpha^1) = 0, \qquad x^2 - \alpha^2 - i(x^1 - \alpha^1) = 0,$$

o sea con

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

Luego,

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = \rho\Big(\Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\Big)^2 - \Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i \alpha^j\Big)\Big(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x^i x^j\Big)\Big).$$

En particular, para los puntos X de contacto de las tangentes con la cónica, se tiene

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = \rho\left(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\alpha^i x^j\right)^2 = \rho\big(f_{\alpha^0}x^0 + f_{\alpha^1}x^1 + f_{\alpha^2}x^2\big)^2.$$

Relación que en coordenadas no homogéneas, puede expresarse de la forma siguiente

$$(x - \alpha^1)^2 + (y - \alpha^2)^2 = \rho(ax + by + c)^2,$$

de donde la razón de distancias de un punto de la cónica al punto F y de dicho punto de la cónica a la recta $ax + by + c = 0$ es constante. Así, F es el foco de la cónica y la recta $ax + by + c = 0$, la directriz.

4.37. Nota.- Del desarrollo de lo anteriomente expuesto se observa que la polar del foco de una cónica es la directriz correspondiente a dicho foco.

4.38. Ejemplo.- *En la parábola $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$, cuya ecuación tangencial es $u_0u_1 - u_0u_2 - u_2^2 = 0$, las ecuaciones que dan las coordenadas del foco son*

$$-\alpha^1 - \alpha^2 + 1 = 0, \qquad \alpha^1 - \alpha^2 = 0,$$

cuya solución es $(1/2, 1/2)$. Y la ecuación de la directriz, polar de este punto respecto de la parábola, es $x - y + 1 = 0$.

4.5. Ecuación reducida de las cónicas no degeneradas en el plano euclídeo

Obtendremos unas últimas ecuaciones reducidas de las cónicas; ahora en el plano euclídeo, en el que consideramos sistemas de coordenadas homogéneas.

Invariantes de la ecuación de una cónica

Dada la ecuación de una cónica $f((x^0, x^1, x^2)) = {}^tXAX = 0$ en el plano euclídeo, tratamos de encontrar una forma más sencilla mediante transformaciones isométricas. Para ello, veamos primero qué cantidades relativas a los coeficientes en una ecuación de una cónica son invariantes por isometrías. Estas cantidades invariantes, denominados invariantes métricos, vienen dadas en el siguiente resultado:

4.39. Proposición.- *En toda cónica* ${}^{t}XAX = 0$ *son invariantes* $|A|$, $A^{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ *y* $a_{11} + a_{22}$.

Es decir, que después de un cambio de coordenadas del tipo $X = DY$, donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

la ecuación de la cónica queda

$${}^{t}XAX = {}^{t}(DY)A(DY) = {}^{t}Y\,{}^{t}DADY = {}^{t}YBY = 0,$$

donde $B = {}^{t}DAD$, y debe verificarse que $|A| = |B|, A^{00} = B^{00}$ y $a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22}$.

Demostración.- I) Como $|B| = |{}^{t}DAD| = |{}^{t}D||A||D| = |D|^2|A| = (\pm 1)^2|A| = |A|$, queda probado que el determinante de la matriz asociada a una cónica $|A|$ es un invariante métrico.

II) Para ver que A^{00} es invariante debemos calcular B^{00}; teniendo presente que

$$B = {}^{t}DAD = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d_2 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$B^{00} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A^{00} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |B^{00}| = |A^{00}|.$$

III) Finalmente

$$b_{11} = (a_{01}\cos\alpha - a_{02}\operatorname{sen}\alpha, a_{11}\cos\alpha - a_{12}\operatorname{sen}\alpha, a_{12}\cos\alpha - a_{22}\operatorname{sen}\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\cos\alpha - a_{12}\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha - (a_{12}\cos\alpha - a_{22}\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= a_{11}\cos^2\alpha - 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\operatorname{sen}^2\alpha.$$

$$b_{22} = (a_{01}\operatorname{sen}\alpha + a_{02}\cos\alpha, a_{11}\operatorname{sen}\alpha + a_{12}\cos\alpha, a_{12}\operatorname{sen}\alpha + a_{22}\cos\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}\operatorname{sen}\alpha + a_{12}\cos\alpha)\cos\alpha + (a_{12}\operatorname{sen}\alpha + a_{22}\cos\alpha)\cos\alpha =$$

$$= a_{11}\operatorname{sen}^2\alpha + 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha.$$

Luego: $b_{11} + b_{22} = a_{11}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + a_{22}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = a_{11} + a_{22}$. $\boxdot$

Cálculo de los coeficientes de la ecuación reducida de una cónica en el plano euclídeo

Los invariantes obtenidos, permiten calcular directamente los coeficientes de la ecuación reducida de una cónica. En efecto, dada una cónica de ecuación

$$a_{00}(y^0)^2 + a_{11}(y^1)^2 + a_{22}(y^2)^2 + 2a_{01}y^0y^1 + 2a_{02}y^0y^2 + 2a_{12}y^1y^2 = 0,$$

consideremos los siguientes casos:

a) Si la cónica tiene centro propio (elipse o hipérbola), esto es, si $A^{00} \neq 0$, y adoptamos como nuevos ejes los de la cónica, la ecuación de este tomará la forma

$$\alpha_1(x^1)^2 + \alpha_2(x^2)^2 + \alpha_0(x^0)^2 = 0.$$

Pero $\alpha_1 + \alpha_2 = a_{11} + a_{22}$ y $\alpha_1\alpha_2 = A^{00}$, se deduce que α_1 y α_2 son las raices de la ecuación

$$\alpha^2 - (a_{11} + a_{22})\alpha + A^{00} = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = |A| \Rightarrow \alpha_0 = \frac{|A|}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{|A|}{A^{00}},$$

con lo que tenemos la ecuación reducida

$$\boxed{\alpha_1(x^1)^2 + \alpha_2(x^2)^2 + \frac{|A|}{A^{00}}(x^0)^2 = 0}$$

b) Cuando la cónica es una parábola su ecuación reducida, referida al eje y a la tangente en el vértice, es de la forma

$$\beta(x^2)^2 + 2\alpha x^0x^1 = 0.$$

Comparando los invariantes de esta ecuación con la ecuación general dada, resulta

$$\beta = a_{11} + a_{22} \qquad \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = -\alpha^2\beta = |A| \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\frac{|A|}{a_{11} + a_{22}}}$$

el signo de α [1] depende de la elección del sentido positivo sobre el eje Ox^1. Queda por tanto

$$\boxed{(a_{11} + a_{22})(x^2)^2 + 2\sqrt{-\frac{|A|}{a_{11} + a_{22}}}x^0x^1 = 0}$$

4.6. Haces de cónicas. Determinación de cónicas

La ecuación general de una cónica encierra seis coeficientes; mas, como se puede dividir por uno cualquiera de ellos no nulo, con cinco relaciones entre ellos bastan para determinarlos. En el caso de que estas relaciones den lugar a cinco ecuaciones lineales independientes la cónica queda determinada. Algunos ejemplos de condiciones geométricas que dan lugar a ecuaciones lineales o cuadráticas entre los coeficientes son los siguientes:

1) La condición de ser conjugados dos puntos o la de pertenecer un punto a la cónica equivalen a una ecuación lineal entre los coeficientes.

[1] El radicando es siempre positivo pues, al ser en una parábola $A^{00} = 0$, se tiene que $a_{12} = \lambda a_{11}$ y $a_{22} = \lambda a_{12}$; por tanto, $|A| = -a_{11}(-\lambda a_{01} + a_{02})^2$ y $a_{11} + a_{22} = a_{11}(1 + \lambda^2)$.

2) Dar un punto y su polar o un punto de la cónica con su tangente o el conocimiento de una involución de puntos conjugados equivalen a dos relaciones lineales; pues basta expresar que el punto dado es conjugado de dos de su polar.

3) Si se conoce un triángulo autopolar equivale a tres relaciones lineales; pues basta expresar que cada vértice es conjugado con los otros dos.

4) El conocimiento de una involución de puntos y el haz de sus polares equivale a cuatro relaciones lineales entre los coeficientes.

5) La condición de ser conjugadas dos rectas (pág. 99) o la de ser tangente una recta o la condición de ser parábola equivalen a una relación cuadrática entre los coeficientes.

Combinando condiciones de este tipo de modo que resulten cinco relaciones entre los coeficientes podremos determinar la ecuación de la cónica. Un camino que nos permite, en muchos casos, determinar con rapidez y elegancia la ecuación de una cónica lo proporciona la teoría de haces y series de cónicas que vamos a desarrollar a continuación.

4.40. Definición.- *Dadas dos cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de ecuaciones $f_1((x^0,x^1,x^2)) = {}^{t}XA_1X = 0$ y $f_2((x^0,x^1,x^2)) = {}^{t}XA_2X = 0$, respectivamente, llamaremos* haz de cónicas *al conjunto o familia de las cónicas cuyos puntos satistacen a la ecuación*

$$\alpha f_1((x^0,x^1,x^2)) + \beta f_2((x^0,x^1,x^2)) =$$
$$= \alpha\, {}^{t}XA_1X + \beta\, {}^{t}XA_2X = 0, (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

De la definición se sigue que las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son de la familia, pues basta darle a los parámetros α y β los valores $0,1$ y $1,0$, respectivamente.

Poniendo $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ la ecuación del haz de cónicas se escribe

$${}^{t}XA_1X + \lambda\, {}^{t}XA_2X = 0$$

y conviniendo que para $\lambda = \infty$ resulta la cónica ${}^{t}XA_2X = 0$, se establece una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ y las cónicas del haz.

Establezcamos ahora unas proposiciones, con técnicas puramente algebraicas, que utilizaremos para hacer posteriormente un estudio sobre los tipos de haces de cónicas.

4.41. Proposición.- *Un punto (real o imaginario) de intersección de dos cónicas es común a todas las cónicas del haz que ellas dos determinan.*

Demostración.- Sea $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, por tanto ${}^{t}PA_1P = 0$ y ${}^{t}PA_2P = 0$, luego

$${}^{t}PA_1P + \lambda\, {}^{t}PA_2P = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

con lo que el punto P pertenece a todas las cónicas del haz determinando por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. $\boxdot$

4.42. Definición.- *Los puntos de intersección de las cónicas del haz se denominan* puntos base o fijos *del haz.*

4.43. Proposición.- *Por un punto no básico de un haz de cónicas pasa una y sólo una cónica del haz.*

Demostración.- Sea P un punto no básico, entonces ${}^{\mathrm{t}}PA_1P \neq 0$ o ${}^{\mathrm{t}}PA_2P \neq 0$. Así la ecuación

$$ {}^{\mathrm{t}}PA_1P + \lambda\, {}^{\mathrm{t}}PA_2P = 0 $$

admite una solución única, a la cual corresponde una y sólo una cónica del haz que pasa por el punto P. ⊡

4.44. Proposición.- *Un haz de cónicas contiene como máximo tres cónicas degeneradas, a menos que esté compuesto por cónicas todas degeneradas.*

Demostración.- Teniendo en cuenta que el haz de cónicas viene dado por la ecuación

$$ {}^{\mathrm{t}}X(A_1 + \lambda A_2)X = 0 $$

y que la condición para obtener una cónica degenerada es que $|A_1 + \lambda A_2| = 0$, debemos resolver, para hallar las cónicas degeneradas, la ecuación en λ

$$ |A_1 + \lambda A_2| = |A_2|\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + |A_1| = 0, $$

la cual proporciona, al resolverla, tres raices a lo más, salvo que todos los coeficientes sean nulos y entonces, $|A_1 + \lambda A_2| = 0$, cualquiera que sea λ, por lo que todas las cónicas del haz serían degeneradas. Haces degenerados son, por ejemplo, $\alpha(x^1)^2 + \beta(x^2)^2 = 0$ y $\alpha x^1x^2 + \beta x^0x^1 = 0$. ⊡

4.45. Proposición.- *En todo haz de cónicas no degenerado existen cuatro puntos fijos distintos o confundidos.*

Demostración.- Sea $\mathcal{C}_1$ una cónica no degenerada del haz. Por la proposición anterior, a este haz pertenence por lo menos una cónica $\mathcal{C}$ que se reduce a dos rectas distintas o confundidas; ahora bien, como toda recta corta a una cónica no degenerada en dos puntos, distintos o confundidos, se deduce que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$ tienen cuatro puntos comunes, distintos o confundidos. ⊡

Tipos de haces de cónicas

De la última proposición se desprende la siguiente clasificación, según la configuración que adopten los puntos fijos, y supuesto que las cónicas del haz no sean todas degeneradas:

I) *Los cuatro puntos fijos son distintos.*

Las cónicas del haz se cortan en cuatro puntos; entonces tenemos tres cónicas degeneradas en pares de rectas, determinadas por los tres pares de rectas que pasan por los cuatro puntos.

Si tomamos dos de estas cónicas como cónicas fundamentales del haz: $r = 0, s = 0$; $p = 0, q = 0$, el haz de cónicas que pasa por los puntos comunes será

$$ r \cdot s + \lambda p \cdot q = 0. $$

II) *Dos puntos fijos son distintos y otros dos están confundidos.*

Sólo hay dos cónicas degeneradas: una formada por la tangente a las cónicas no degeneradas del haz y por la recta que pasa por los otros tres puntos distintos; y otra cónica formada por las rectas que unen el punto de tangencia con los otros dos puntos de intersección. El haz de cónicas toma la forma

$$ r \cdot s + \lambda p \cdot t = 0. $$

En este caso, decimos que las cónicas del haz son simplemente tangentes.

III) *Los puntos fijos están confundidos por pares.*

El haz contiene dos cónicas degeneradas: una constituida por la recta doble que une los dos puntos, y otra formada por el par de tangentes a las cónicas no degeneradas del haz en los dos puntos fijos distintos; luego la ecuación del haz es

$$t_1 \cdot t_2 + \lambda p^2 = 0.$$

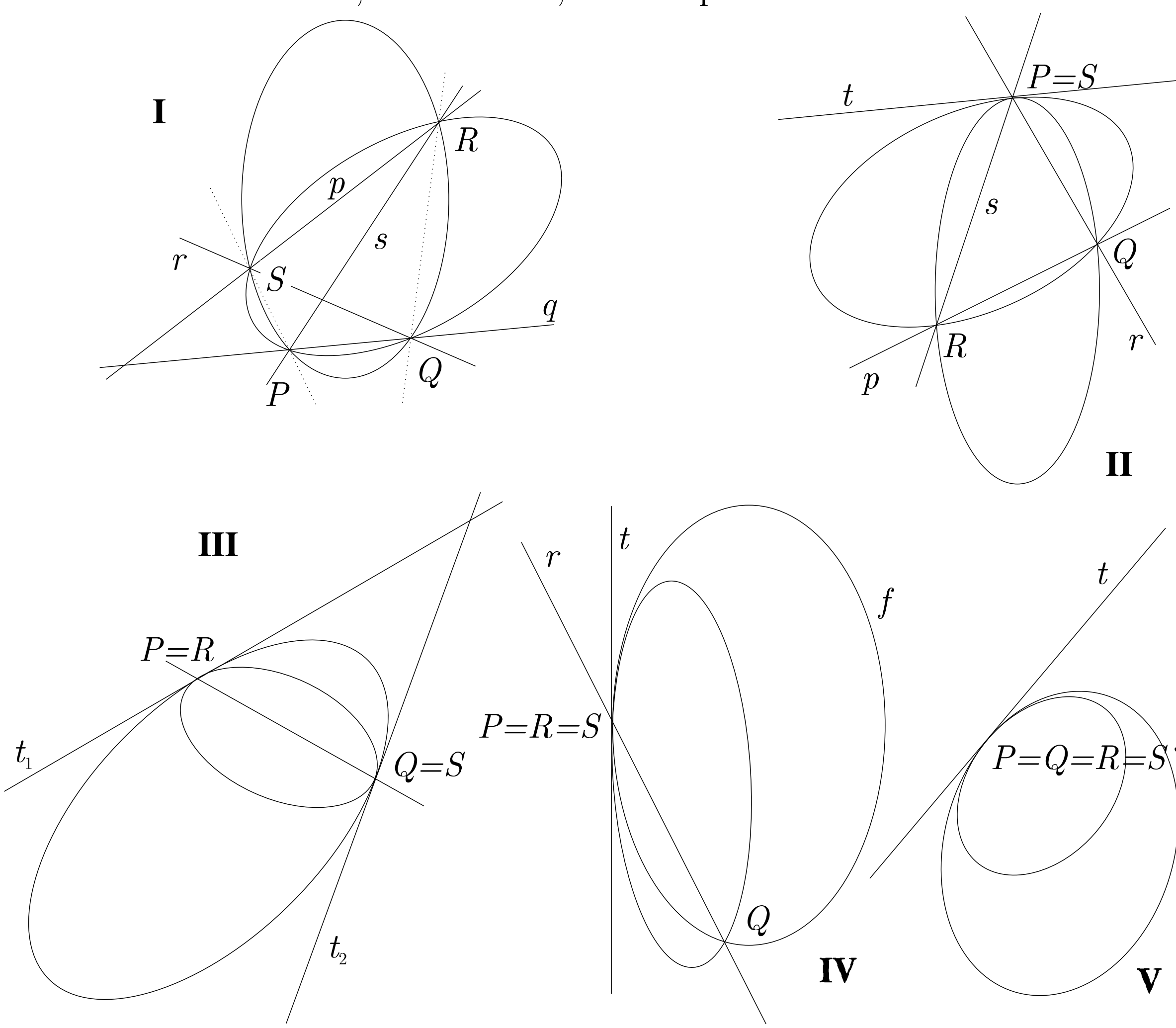
Se dice que las cónicas del haz son bitangentes.

IV) *Tres puntos fijos están confundidos y el cuarto es distinto.*

En este caso el haz no contiene más que una cónica degenerada constituida por la recta que une dos puntos distintos y la tangente a las cónicas en los puntos confundidos. Si $f = 0$ es una cónica del haz, podemos escribir como ecuación del haz

$$f + \lambda r \cdot t = 0.$$

Las cónicas del haz, en este caso, se dice que son osculatrices.



V) *Los cuatro puntos fijos están confundidos en uno.*

El haz sólo contiene una cónica degenerada formada por la recta doble tangente en el único punto fijo a las cónicas propias del haz. Si $f = 0$ es la ecuación de otra cónica del mismo, la ecuación del haz es

$$f + \lambda t^2 = 0.$$

Decimos ahora que las cónicas son hiperosculatrices.

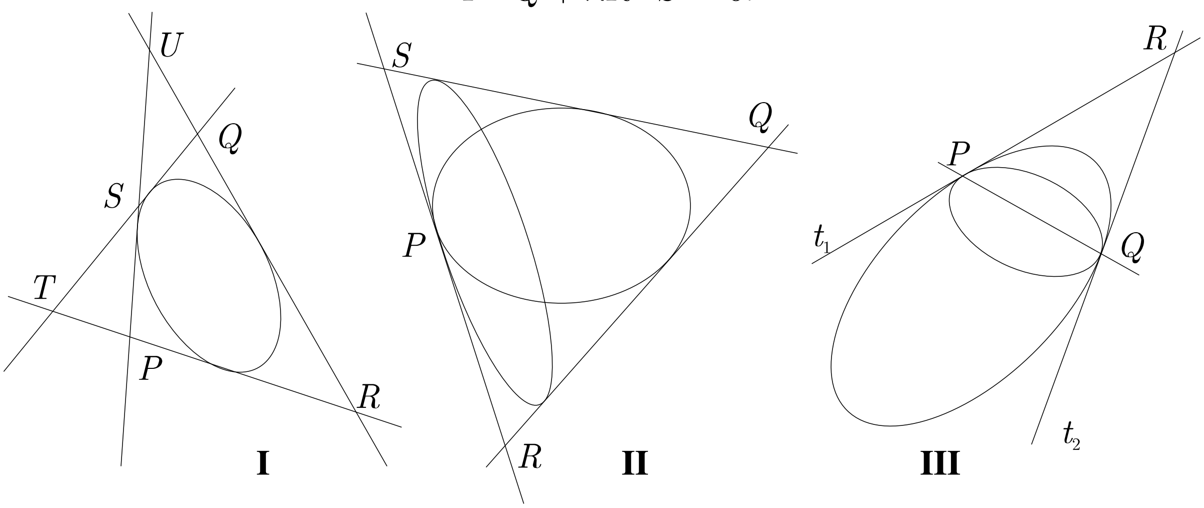
Tipos de haces tangenciales o series de cónicas

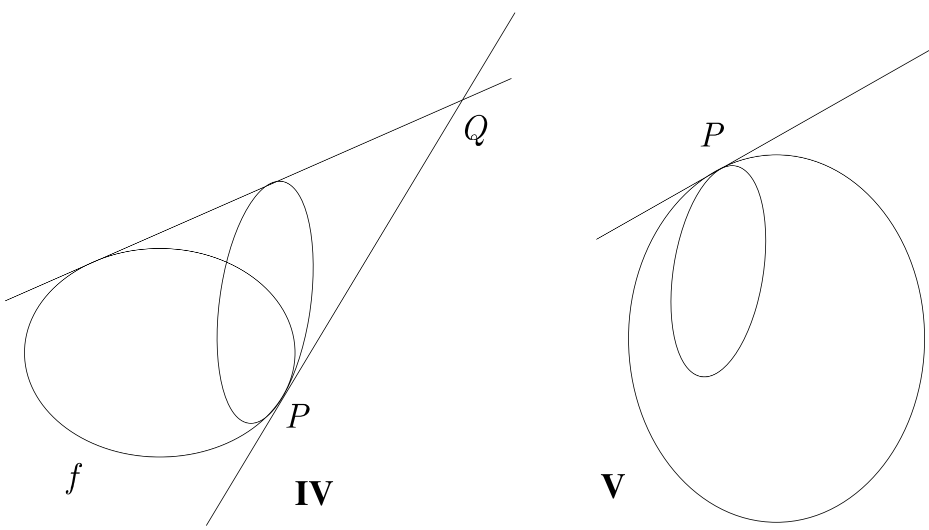
De forma dual a como hemos hecho el estudio de los haces de cónicas podemos hacer el de series de cónicas, esto es, de los haces de cónicas cuando estas vienen dadas en forma tangencial; así distinguiremos los casos siguientes:

I) *Las cónicas son tangentes a cuatro rectas.*

Hay tres cónicas degeneradas en los pares de puntos $(P, Q), (R, S), (T, U)$. Si $P = 0$ es la ecuación de uno de los puntos, y así sucesivamente para los demás, la ecuación del haz será de la forma

$$P \cdot Q + \lambda R \cdot S = 0.$$





II) *Las cónicas son tangentes en un punto a una recta y tangentes a otras dos rectas distintas.*

En este caso hay sólo dos cónicas degeneradas en los puntos (P, Q) y (R, S); y la serie toma la forma

$$P \cdot Q + \lambda R \cdot S = 0.$$

III) *Las cónicas son bitangentes.*

Si $P = 0, Q = 0$ son los puntos de contacto y $R = 0$ es el intersección de las tangentes, la ecuación del haz tangencial toma la forma

$$P \cdot Q + \lambda R^2 = 0.$$

IV) *Las cónicas son osculatrices.*

Sea $P=0$ la ecuación del punto de contacto y $Q=0$ el punto de intersección de las tangentes comunes. Dada una cónica no degenerada de ecuación $f=0$, la ecuación del haz tangencial es

$$f+\lambda P\cdot Q=0.$$

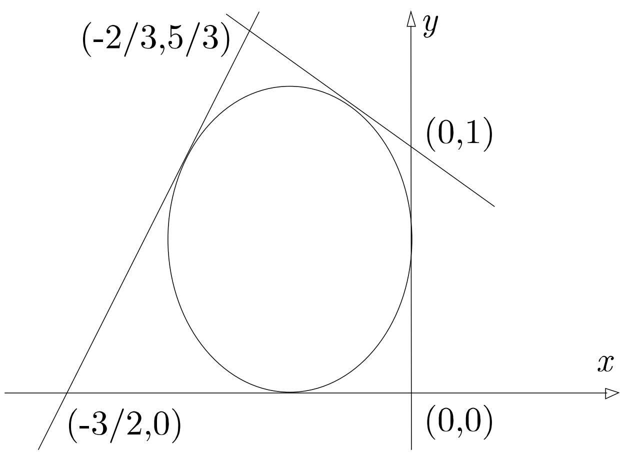
V) *Las cónicas son hiperosculatrices.*

La única cónica degenerada es el punto de contacto $P=0$, doble, y el haz tangencial es de la forma, dada una cónica no degenerada tangente en P:

$$f+\lambda P^2=0.$$

4.46. Ejemplo.- *Determinar el lugar geométrico de los centros de las cónicas tangentes a las rectas*

$$x=0, \qquad y=0, \qquad x+y-1=0, \qquad 2x-y+3=0.$$



La ecuación de la serie de cónicas inscritas en el cuadrilátero de la figura es

$$u_0(2u_1-5u_2-3u_0)-$$
$$\lambda(u_2+u_0)(3u_1-2u_0)=0.$$

Si consideramos una cónica de la familia correspondiente al parámetro λ, las coordenadas del centro son (A^{00},A^{01},A^{02}).

O sea, $(-6+4\lambda, 2-3\lambda, -5+2\lambda)$; es decir:

$$x=\frac{2-3\lambda}{-6+4\lambda}, \qquad y=\frac{-5+2\lambda}{-6+4\lambda}.$$

Que eliminando el parámetro λ resulta la ecuación, en coordenadas cartesianas, de los centros:

$$8x-10y-11=0.$$

4.47. Ejemplo.- *Ecuación de la cónica tangente a las rectas*

$$x-1=0; \quad x-2=0; \quad y-1=0; \quad 2x-y=0; \quad y-3=0.$$

Puntos de intersección de las cuatro primeras rectas y ecuación plückerianas o tangenciales de estos puntos:

$$P_1(1,1)\equiv u+v+1=0; \qquad P_2(2,1)\equiv 2u+v+1=0;$$
$$P_3(2,4)\equiv 2u+4v+1=0; \qquad P_4(1,2)\equiv u+2v+1=0.$$

Cónicas inscritas al cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$:

$$(u+v+1)(2u+4v+1)+\lambda(2u+v+1)(u+2v+1)=0.$$

Por ser tangente a la recta $y-3=0$ de cordenadas tangenciales $(0,1/3)$, resulta $\lambda=1$; luego:

$$4u^2+11uv+6v^2+6u+8v+2=0 \qquad \text{ó} \qquad 16x^2+4y^2-8xy-32x-4y+25=0.$$

4.48. Ejemplo.- *Hipérbola que tienen por asíntotas las rectas $2x-y+1=0$ y $x-2y+2=0$, y que pasa por el punto $(1,1)$.*

Haz de cónicas bitangentes en los puntos impropios de las rectas dadas, en coordenadas afines:

$$(2x-y+1)(x-2y+2)+\lambda=0.$$

Por pasar por $(1,1)$, $\lambda=-2$; luego : $2x^2+2y^2-5xy+5x-4y=0$.