3. Geometría Proyectiva

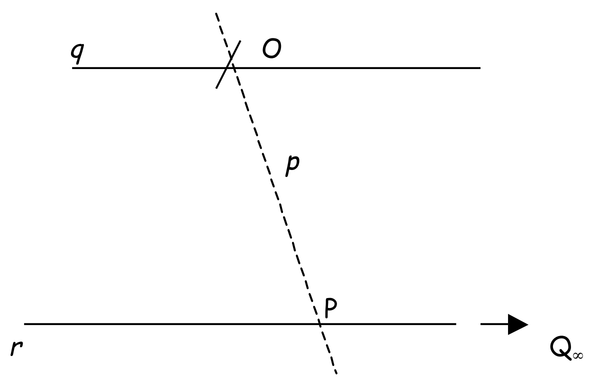
La geometría proyectiva ha tenido su época de desarrollo en el siglo XIX y a principios del siglo XX, aunque algunos de sus resultados ya eran conocidos desde mucho antes (el teorema de Pascal data de 1640). Los artistas y arquitectos del Renacimiento, en su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de perspectiva (representación bidimensional de objetos tridimensionales) trabajaron sobre conceptos geométricos como secciones y proyecciones: Piero Della Francesca (1410-1492); Leone Battista Alberti (1404-1472); Leonardo Da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471-1528).

El matemático francés Gérard Desargues (1591-1661) introdujo este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración (ahora válidos para todas las cónicas, a diferencia de los griegos que tenían métodos distintos para diferentes casos) generan un avance significativo desde la época de Apolonio. Influidos por él, los desarrollos son continuados por Blaise Pascal (1623-1662) y Philippe de Hire (1649-1718).

Retomaremos en este capítulo algunos de los temas fundamentales, trabajados en el plano proyectivo real, a sabiendas de que la teoría es mucho más general. Creemos que es uno de los temas que los docentes deben conocer, tanto por el uso que en su desarrollo se hace de las demostraciones basadas en propiedades geométricas, como porque las colineaciones, y con ellas los invariantes proyectivos, aparecen en un contexto que permite diferenciarlas fácilmente de las transformaciones afines. En este sentido, la interpretación del paralelismo y la perpendicularidad como las propiedades que determinan respectivamente las afinidades y semejanzas, darán al docente una visión ampliada y diferente de estas propiedades.

El plano proyectivo real.

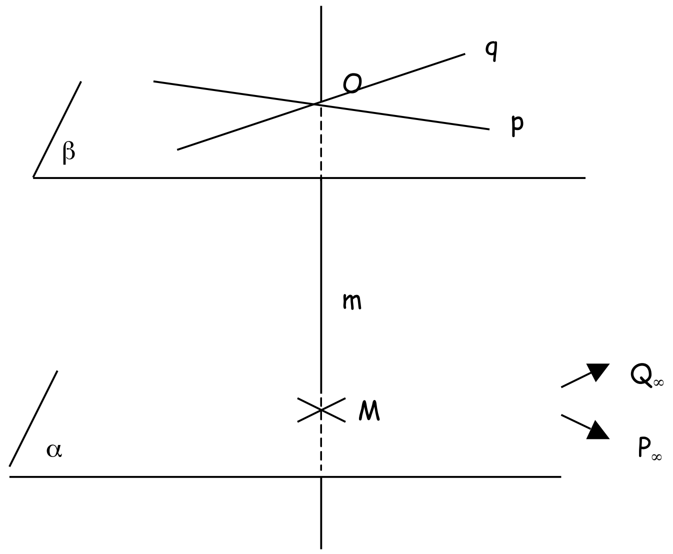
Consideremos una recta r y un punto O no perteneciente a r, en el plano de la geometría elemental. Hagamos corresponder a cada punto P de la recta r, la recta p del haz de rectas que pasa por O que contiene al punto P



Esta correspondencia no es biunívoca, ya que la recta q del haz que es paralela a r no se corresponde con ningún punto de r.

Para obtener una correspondencia biunívoca, ampliamos la recta r, agregándole un punto Q_∞ que llamamos el punto impropio o punto del infinito de la recta r. A esta recta ampliada la llamamos **recta proyectiva**.

Análogamente consideremos, en el espacio ordinario, un plano α y un punto O que no pertenezca a α, y hagamos corresponder a cada punto M del plano α la recta m del haz de rectas que pasa por O que contiene al punto M



Ninguna de las rectas del haz que están contenidas en el plano β paralelo a α por O se corresponde con un punto de α. Convengamos en ampliar el plano α con puntos P_∞, Q_∞, ... , uno por cada una de las rectas *p,q,...* del plano β que pasan por O . Estos puntos se llaman **puntos impropios o puntos del infinito del plano α.**

Observemos que

- una recta r contenida en α se corresponde con el plano determinado por ella y el punto O, y recíprocamente,
- cada plano por O, distinto de β, se corresponde con una recta de α. Un punto propio de α, pensado como intersección de dos rectas r y r' , se corresponde con la recta intersección de los planos determinados por r y O , r' y O respectivamente.

Si consideramos dos rectas paralelas s y s' de α, la intersección de los planos que cada una de ellas determina con el punto O es una recta de β, que se corresponde con un punto del infinito de α (en este contexto se dice que "las paralelas se cortan en el infinito"). Resulta entonces que el plano β se corresponde con el conjunto de todos los puntos impropios de α, de aquí que a este conjunto se lo denomine la **recta impropia** .

Dar un punto impropio es equivalente, entonces, a dar una dirección del plano (una recta o cualquier otra paralela a ella). El plano euclidiano ampliado con la recta impropia se llama el **plano proyectivo**, y es equivalente al haz de rectas que pasan por un punto del espacio, considerando las rectas del haz como puntos del plano proyectivo, y los planos que pasan por el punto como rectas del plano proyectivo.

Pensemos ahora en el espacio R^3 como un R -espacio vectorial, llamamos rectas homogéneas a los subespacios de dimensión 1 (las rectas que pasan por el origen).
Cada recta homogénea E queda determinada por un vector (no nulo) v de R^3 , o cualquier otro vector λv, $\lambda \neq 0$. Esto nos permite pensar al conjunto de rectas homogéneas como el conjunto de vectores no nulos de R^3 con la relación de equivalencia

$$v \equiv \lambda v,\ \lambda \neq 0,\ \lambda \in R.$$

Este conjunto es **el plano proyectivo real asociado a R^3 que llamaremos P_2** . Las rectas homogéneas de R^3 son los puntos de P_2. Haciendo abuso de notación, utilizaremos las mismas letras v para indicar los vectores de R^3 que para los puntos de P_2, a sabiendas de que para estos últimos vale la relación de equivalencia.

Con la misma definición de independencia lineal que para espacios vectoriales, podemos concluir que en P_2 hay a lo sumo 3 puntos linealmente independientes.

El estudio de la geometría proyectiva tiene dos abordajes posibles, el geométrico o sintético, que acabamos de ver, y una manera algebraica, basada en la noción de espacio vectorial. Para ello, consideremos un cuerpo ***K*** cualquiera de característica distinta de 0 ($a*b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$), ***E*** un espacio vectorial sobre ***K***. Llamamos espacio proyectivo asociado al espacio vectorial ***E***, al conjunto ***P=P(E)*** de todas las rectas vectoriales (subespacios vectoriales de dimensión 1) de ***E***.

Si $u \neq 0$, $u \in E$, notamos $\langle u \rangle$ *={espacio vectorial generado por u}* $\subset E$

$$\langle u \rangle = \{\lambda u,\ \lambda \in K\}$$

Una presentación alternativa es definir ***P*** como un espacio cociente:

$$P = E - \{0\} / \approx \ , \text{ donde } u \approx v \Leftrightarrow u = \lambda v\ ,\ \lambda \neq 0\ ,\ \lambda \in K$$

Para ver que estas dos definiciones son equivalentes, necesitamos definir una biyección entre
P(E) y E-{0}/≈.

Sea π: $E - \{0\} \rightarrow P$; $u \rightarrow \langle u \rangle$
Entonces, π:$E\text{-}\{0\}/\approx \rightarrow P(E)$ es una biyección pues si la clase de equivalencia de u por $\approx \in E\text{-}\{0\}/\approx$, entonces $u \in E\text{-}\{0\}$; $\langle u \rangle \in P(E)$, es decir, está bien definida.

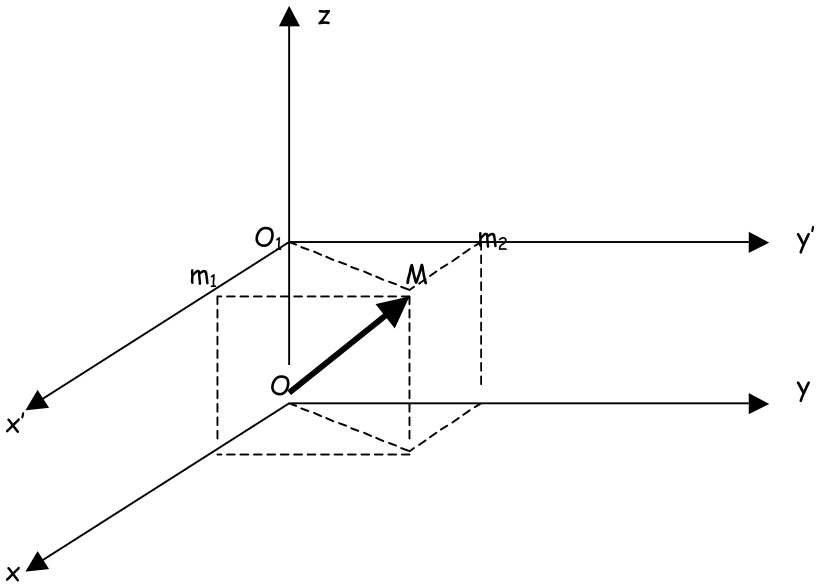
Por otro lado, si dos clases son distintas, los vectores que las generan son linealmente independientes, y por lo tanto los subespacios generados son respectivamente diferentes (inyectividad). Y dado un subespacio de dimensión 1, siempre existe un vector que lo genera (suryectividad).

En el caso en que $E = K^{n+1}$, $P(K^{n+1})$ se llama espacio proyectivo canónico. Nosotros vamos a trabajar con ***$P(R^3)$ = plano proyectivo.***

$P(R^3) = P_2(R) = R^3\text{-}\{0\} / \approx$ = {rectas homogéneas de R^3} = {puntos de P_2}
Las rectas homogéneas de R^3 son las que son subespacios, es decir las que pasan por el origen de R^3.
$u \approx w \Leftrightarrow u = \lambda w$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. (Usaremos la misma letra para el vector que genera una recta y ésta pensada como punto de P_2, es decir que vale que $v \approx \lambda v$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. En P_2 hay a lo sumo 3 puntos linealmente independientes.

Veamos cómo definir coordenadas homogéneas en este espacio:
Consideremos una base { b_0, b_1, b_2 } de R^3. Un punto v de P_2 se escribe (unívocamente como vector de R^3) como $v=v_0\, b_0 + v_1\, b_1 + v_2\, b_2$; los coeficientes (v_0, v_1, v_2) determinan el punto de P_2 , salvo la relación de equivalencia. Estos coeficientes se llaman las **coordenadas homogéneas** del punto v de P_2 respecto del sistema de coordenadas homogénas definido por la base de R^3 $\{b_0, b_1, b_2\}$. Las coordenadas homogéneas están determinadas salvo una constante no nula, es decir $(v_0, v_1, v_2) = (\lambda v_0, \lambda v_1, \lambda v_2)$, $0 \neq \lambda \in R$.

Para comparar una interpretación de las coordenadas homogéneas con las coordenadas cartesianas, consideremos el plano α, con un sistema de coordenadas cartesianas x',y' con origen en O_1 , y un punto O situado sobre la normal a α que pasa por O_1 , de modo que tomando un sistema cartesiano en R^3 con origen O , el plano α tenga ecuación $z=1$. Los ejes x e y de este sistema serán los proyectados de x' e y' según el eje z.



Tomemos como base de R^3 la canónica. Si un punto M de α tiene coordenadas (m_1, m_2) en el sistema x',y' , el vector OM de R^3 se escribe como $m_1{*}b_0 + m_2{*}b_1 + b_2$, es decir sus coordenadas homogéneas son $(m_1, m_2, 1)$, o sea $(\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda)$ $0 \neq \lambda \in R$.

El plano proyectivo P_2 tiene dimensión 2, esto significa que existen tres puntos linealmente independientes, y que cuatro puntos siempre son linealmente dependientes.
Los subespacios de dimensión 1 (rectas) son los espacios proyectivos asociados a los subespacios de dimensión 2 de R^3 (recordemos que los planos por O se correspondían con rectas de α).
Una recta queda determinada por dos puntos, y dados v,w puntos de P_2, la recta que determinan es el conjunto de puntos x de la forma

$$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{v} + \mu\, \mathbf{w} ,$$

con coeficientes reales no simultáneamente nulos.

Un punto distinto de w debe tener λ no nulo (todos los múltiplos del vector w son el mismo punto w), con lo cual la recta puede pensarse como el conjunto de puntos x de la forma

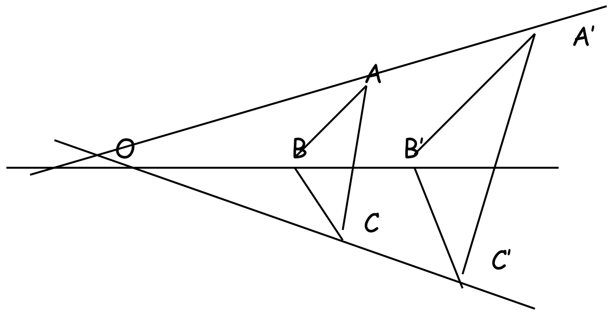
$$\mathbf{x = v + \gamma\, w,\ \gamma \in R.}$$

Tenemos entonces una relación biunívoca entre los elementos del cuerpo (R) y los puntos de la recta que no son w ; en esta representación w es el punto impropio de la recta, y γ se llama la **abcisa o coordenada no homogénea** del punto x sobre la recta.

Son inmediatos, pero importantes, los siguientes resultados, cuya demostración figura como ejercicio:
1) Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta .
2) No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta .
3) Toda recta tiene por lo menos tres puntos .
4) Dos rectas distintas del plano proyectivo siempre tienen un punto común .
5) No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto .
6) Por todo punto del plano proyectivo pasan por lo menos tres rectas.

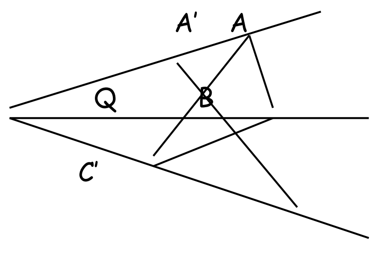
Teorema de Desargues (1593-1661):

Si dos triángulos están relacionados de modo que las rectas que unen vértices homólogos pasan por un mismo punto, los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta.



Dem.: Sean $AA' \cap BB' \cap CC' = O$, $P=AB \cap A'B'$, $Q=AC \cap A'C'$, $R=BC \cap B'C'$.

Queremos probar que P,Q y R están alineados.



Si O es uno de los vértices
Sup. $B'=O$, $AB\cap A'B'=AB\cap AA'=A=P$
$BC\cap B'C'=BC\cap CC'=C=R \Rightarrow$ el lado AC tiene a P, R y $Q=AC\cap A'C'$.
Si los dos triángulos tienen un vértice común, el resultado es inmediato.
Sup. $A=A'$, $AC\cap A'C'=AC\cap AC'=A=Q$
$AB\cap A'B'=AB\cap AB'=A=P$
Entonces tengo solo dos puntos (R y A) que siempre están alineados

En los otros casos escribimos:

$$A'=O+\alpha A\ ,$$
$$B'=O+\beta B\ ,$$
$$C'=O+\gamma C\ .$$

$P=A'-B'=\alpha A-\beta B$, pertenece a AB y a $A'B'$.

Análogamente $R=B'-C'=\beta B-\gamma C$, $Q=C'-A'=\gamma C-\alpha A$.

Sumando

$$P+Q+R= \alpha A - \beta B+ \gamma C - \alpha A + \beta B - \gamma C$$

$$P+Q+R=0 ,$$

es decir son linealmente dependientes, por lo que están alineados.

Teorema (recíproco):
Si dados dos triángulos, sus lados homólogos se cortan en puntos alineados, las rectas que unen sus vértices homólogos pasan por un punto .

Dem.: Supongamos que no, y consideremos $C_1=A'C' \cap OC$ donde $O=AA' \cap BB'$.

Usando Desargues para los triángulos ABC y $A'B'C_1$, resultan alineados los puntos P, R y

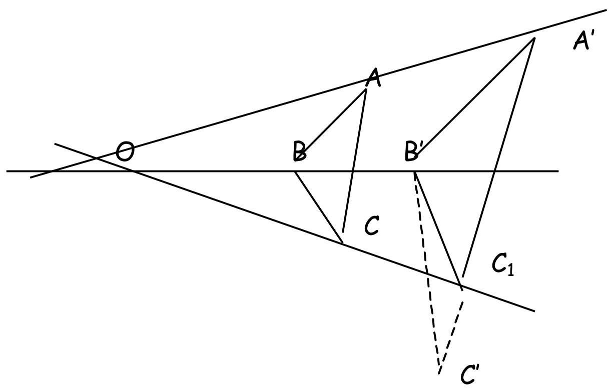
$$Q'=BC\cap B'C_1 \text{ . Entonces } Q'=PR\cap BC=Q,$$

de donde

$$BC\cap B'C_1 = BC\cap B'C' \text{ , ed decir } C_1 \text{ está en } B'C'$$

Y como está en $A'C'$ por definición, resulta

$$C_1=C' \ .$$



Veamos algunos resultados:
Un conjunto de puntos $A_1, A_2, \ldots , A_m$ de P_n se dice linealmente independiente, si no existe ninguna combinación lineal igual a 0 con algún coeficiente no nulo, es decir, si la única manera de escribir a "0" como combinación lineal de los puntos es con todos los coeficientes nulos.

Esta definición en independiente de la representación del punto, ya que R tiene característica 0.

Con esta definición de independencia lineal, que es igual a la usada en un espacio vectorial, el número máximo de puntos linealmente independiente de P_n es (n+1).

Si tengo (n+1) vectores l.i. de E, tengo una base de E, y cualquier vector de E se escribe de manera única. Pero esto no me fija un sistema de coordenadas en P_n, necesito agregar otro pnto en ciertas condiciones:

Si K es conmutativo, un sistema de coordenadas homogéneas en $P_n(K)$ queda determinado por (n+2) puntos tales que no haya (n+1) de ellos en el mismo hiperplano. Dados en un cierto orden

$$U, U_0, U_1, \ldots , U_n$$

La condición $U=U_0+U_1+ \dots +U_n$, permite asignar a cada uno de los puntos de la base una determinación fija (salvo una constante no nula, pero igual para todos), que es la que uso para escribir

$$X=x_0U_0+x_1U_1+ \dots + x_nU_n$$

Estas son las coordenadas homogéneas de X en el sistema de referencia. El U se llama punto unidad, los restantes (n+1) puntos se llaman puntos base.

Los subespacios proyectivos de un espacio proyectivo se llaman variedades proyectivas. Un subespacio proyectivo de P(E) será un P(X) donde X es un subespacio vectorial de E. Hay una biyección entre las variedades proyectivas de P(E) y los subespacios vectoriales de E.

Si P(X) es una variedad proyectiva, le asociamos el número:

$$\dim P(X) = \dim (X) - 1$$

$$\text{co-dimensión de } P(X) = \dim P(E) - \dim P(X) = \text{co-dimensión } (X)$$

$P(R^3)$ tiene dimensión 2, por eso hablamos del plano proyectivo.

Usando dim, se puede probar, por ejemplo, que en el plano proyectivo dos rectas siempre se cortan (en general, una recta y un hiperplano siempre se cortan).

Definición: Se llama **colineación** de un espacio proyectivo en otro a toda aplicación biyectiva que manda puntos alineados en puntos alineados.

Observaciones:

- Los espacios deben ser de la misma dimensión pero pueden estar definidos sobre cuerpos distintos. Si este es el caso, aparece involucrado un isomorfismo entre los cuerpos. Cuando el isomorfismo es un automorfismo, se habla de homografía. En nuestro caso, ambas coinciden, y hablaremos de colineaciones.
- Toda colineación entre espacios proyectivos de dimensión n aplica subespacios de dimensión r en subespacios de dimensión r , y como consecuencia, aplica puntos independientes en puntos independientes.

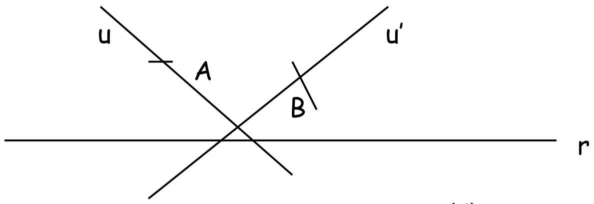
Proposición: Una colineación σ entre dos planos queda determinada por cuatro pares de puntos homólogos, no alineados de a tres.

Dem.:
Se divide la demostración en varios pasos, algunos de los cuales demostraremos más adelante.

a) Usando σ, definimos dos "proyectividades" entre los haces

σ_1: $haz_A \rightarrow haz_{A'}$ (AB,AC,AD → A'B',A'C',A'D')
σ_2: $haz_B \rightarrow haz_{B'}$ (BA,BC,BD → B'A',B'C',B'D')

b) Una recta r del primer plano pasa a los sumo por dos de los puntos, es decir que siempre puedo elegir dos puntos por los que no pasa, digamos A,B ⇒ $P=PA\cap PB$ ⇒ busco P'. Usando la recta r, defino una perspectividad del haz_A en el haz_B , de la siguiente manera: Cada punto (P) de $r\neq AB$ es intersección de dos rectas, una de cada uno de los haces A,B , excepto $r \cap AB$, por lo tanto el haz_A y el haz_B son perspectivos, en el sentido :



manda u en u' tal que se corten en r

c) Usando esa perspectividad, y $\sigma_1^{(-1)}$ y σ_2 , resultan entonces perspectivos los haces A' y B' (ya que dos haces son perspectivos si y solo si la recta que une a sus vertices queda fija). Por lo tanto los homólogos de puntos de r están alineados (en r'). Defino entonces

$$P' = P'A' \cap P'B'$$

d) Para definir los homólogos de P en AB, escribo $P = AB \cap r$ (con r cualquiera por P), entonces
$$P' = A'B' \cap r'$$

e) Por construcción, resulta única, ya que $\sigma_1^{(-1)}$ y σ_2 quedan unívocamente determinadas por saber la imagen de tres rectas.

Observaciones:
En coordenadas homogéneas, las ecuaciones de la colineción serán

$$\rho x'_0 = a_{00}\, x_0 + a_{01}\, x_1 + a_{02}\, x_2$$
$$\rho x'_1 = a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2$$
$$\rho x'_2 = a_{20}\, x_0 + a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2$$

con $\det(a_{ij})$ distinto de cero. Esto es obviamente biyectivo y transforma rectas en rectas, por lo tanto es una colineación.

Por otro lado, dada una colineación por 4 pares de puntos homólogos, basta tomar adecuadamente los puntos base y unidad del sistema en cada plano para llegar a las ecuaciones:
$$\rho x'_0 = x_0$$
$$\rho x'_1 = x_1$$
$$\rho x'_2 = x_2$$
que son de esta forma.

En coordenadas no homogéneas, poniendo
$$u = x_1/x_0$$
$$v = x_2/x_0$$
$$u' = x'_1/x'_0$$
$$v' = x'_2/x'_0$$

resultan
$$u' = (a_{10} + a_{11}\, u + a_{12}\, v) / (a_{00} + a_{01}\, u + a_{02}\, v)$$
$$v' = (a_{20} + a_{21}\, u + a_{22}\, v) / (a_{00} + a_{01}\, u + a_{02}\, v)$$

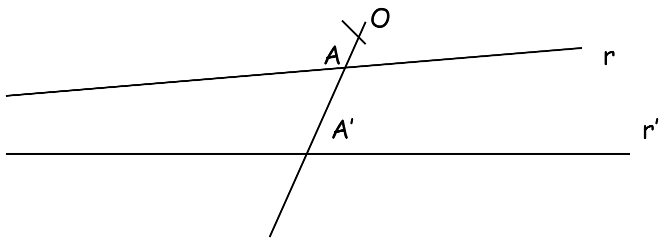
que son las ecuaciones de una proyectividad en el plano.

Proyectividades

El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva, ya estudiados por ejemplo, por Leonardo Da Vinci. La imagen plasmada por un pintor es una proyección del original sobre la tela, con centro en el ojo del artista. En este proceso las longitudes y los ángulos resultan distorsionados de alguna manera que tiene que ver con las posiciones relativas de los objetos. Aun así, la estructura geométrica del original resulta reconocible en la tela. Esto se debe a la existencia de ciertos invariantes proyectivos, es decir, propiedades que aparecen "sin cambio" en la tela y hacen posible la identificación. Es claro que estos invariantes no tienen que ver con longitudes, ángulos o congruencias. Encontrar y analizar estos invariantes es el objeto de la geometría proyectiva. Cabe señalar que un estudio sistemático en este sentido recién fue realizado a fines del siglo XVIII, cuando un oficial francés, J.V.Poncelet (1788-1867) escribió su *famoso Traité des propriétés projectives des figures* en 1813, siendo prisionero de guerra en Rusia.

Las transformaciones que nos interesan son aplicaciones biyectivas entre espacios proyectivos (de la misma dimensión) que mandan puntos alineados en puntos alineados, y con ello r-espacios en r-espacios, y puntos linealmente indepencientes en puntos linealmente independientes. Para analizar los invariantes asociados con estas transformaciones, vamos a empezar al revés.

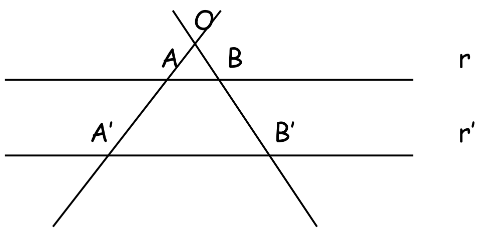
Consideremos dos rectas $r \neq r'$ y un punto O que no pertenezca a ninguna de ellas (¿por qué podemos estar seguros de que hay un tal punto O ?). Definamos la correspondencia (de r en r') que a cada punto A de r le asigna el punto A' de r' tal que O, A, A' estén sobre una misma recta.



Esta aplicación (biyectiva) de r en r' se llama una **perspectividad de centro O** (también se suele decir que A' es la proyección de A sobre r' desde O). Es una aplicación biyectiva de r en r'.

Veamos cuántos puntos, como mínimo, necesitamos para definir un invariante proyectivo. La idea es tomar n puntos de r y n puntos de r' , y ver si podemos encontrar una perspectividad (o un producto de perspectividades) que mande unos en otros. Si podemos encontrarla, esto significa que n puntos pueden transformarse en otros n cualesquiera por una perspectividad o un producto de ellas, y por lo tanto son proyectivamente equivalentes, o sea que no pueden tener ningún invariante proyectivo.

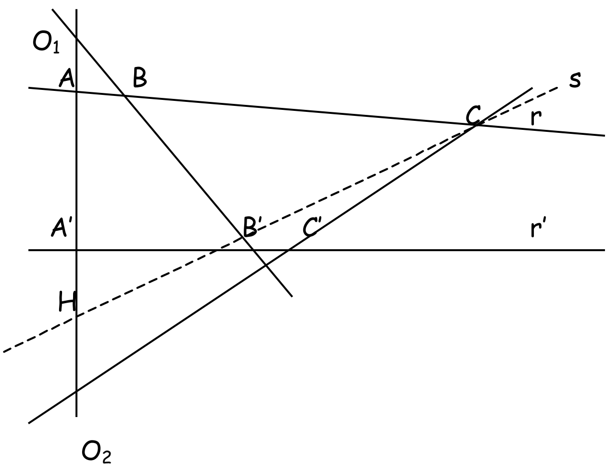
Comencemos con dos puntos A, B de r y otros dos A', B' de r' .



Tomando como O el punto intersección de las rectas AA' y BB', resulta que A y B se transforman en A' y B' respectivamente por la perspectividad de r en r' de centro O.
En conclusión, no se pude definir un invariante proyectivo con dos puntos (una perspectividad puede mandar dos puntos en cualesquiera otros dos). Una perspectividad entre rectas queda determinada por dos pares de homólogos.

Como la perspectividad queda determinada por dos pares de homólogos, si consideramos tres pares de homólogos, veremos que podemos hacerlos corresponder por una composición de dos perspectividades. El producto de un número finito de perspectividades es una proyectividad (entre rectas).

Sean A, B, C tres puntos de r y A', B', C' tres puntos de r'.
Sean O_1 el punto de intersección de A,A' y B,B' ; O_2 el punto de intersección de A,A' y C,C' ; s la recta determinada por B' y C.



$\sigma_1 : r \to s \ (O_1)$
$A \to H = (AA' \cap s)$
$B \to B'$, $C \to C$

$\sigma_2 : s \to r' \ (O_2)$
$H \to A'$, $B' \to B'$
$C \to C'$

Proyectemos sucesivamente A,B,C sobre s desde O_1 para obtener $H=AA' \cap s, B', C$, y éstos sobre r' desde O_2, para obtener A',B',C'.
Como consecuencia, tampoco puede existir un invariante proyectivo para ternas de puntos.

Para cuatro puntos, resulta que no siempre se puede llevar una cuaterna en otra por sucesivas perspectividades. Cuatro puntos alineados **sí** tienen un invariante proyectivo, la llamada **razón doble** .

Definición: Dados en cierto orden cuatro puntos A,B,C,D alineados, se llama **razón doble** de los mismos a la expresión

$$(ABCD) = \frac{\lambda_1 \mu_0}{\lambda_0 \mu_1}, \quad C = \lambda_0 A + \mu_0 B \quad D = \lambda_1 A + \mu_1 B$$

Observaciones:

- Si los 4 puntos son propios, y llamamos a,b,c,d a sus abcisas sobre la recta, resulta
$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$
- La razón doble está bien definida si los 4 puntos son distintos.
- Hay $4!=24$ razones dobles que se pueden formar con 4 puntos. Se puede verificar (ver jercicios) que estas toman a lo sumo 6 valores distintos, a saber:

ρ, $1/\rho$, $1-\rho$, $(\rho-1)/\rho$, $1/(1-\rho)$, $\rho/(\rho-1)$

- Si las coordenadas homogéneas de los puntos son respectivamente (a_0, a_1), (b_0, b_1) , (c_0, c_1) y (d_0, d_1) , resulta

$$(ABCD) = \frac{a_0c_1 - a_1c_0}{b_0c_1 - b_1c_0} : \frac{a_0d_1 - a_1d_0}{b_0d_1 - b_1d_0}$$

Supongamos ahora que tenemos tres puntos A,B,C fijos alineados y X un punto variable sobre la recta que contiene a A,B,C, y observemos cómo varía la razón doble ρ=(ABCX) , según varía X.

Llamando a,b,c,x a las abcisas respectivas, resulta

$$(ABCD) = \rho = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b}$$

Con esto, si X $\neq$ A , ρ toma un valor bien determinado, y recíprocamente, para cada valor de ρ, se puede despejar el valor de x . Así resulta X=B sii ρ=0 , X=C sii ρ=1 .

Para que la correpondencia entre los valores de ρ y los puntos de la recta sea biunívoca, es necesario asignar un valor a la razón doble cuando X=A . Convenimos en representar este valor por (ABCD) = ∞ . Esto amplía el cuerpo R con un símbolo que no es un elemento del cuerpo, por lo cual no verifica las reglas de las operaciones del mismo, pero que viene a representar el inverso del 0.

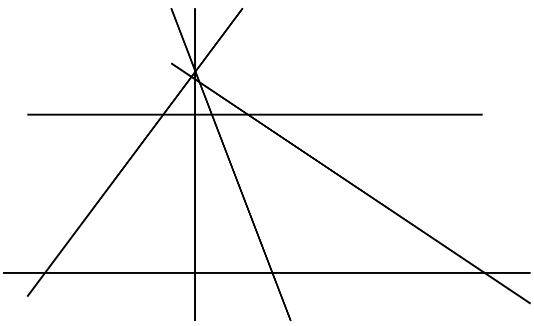
Para que la relación así definida resulte biunívoca, se conviene en que:

$\infty=0^{-1}$, $0=\infty^{-1}$, $-\infty = \infty$, $\infty + a = \infty$, $\infty - a = \infty$, $b*\infty = \infty$, $\infty*\infty = \infty$, para a,b reales, b no nulo,

pero quedan indeterminadas las operaciones $\infty + \infty$; $\infty - \infty$; $0*\infty$.

Con esta convención, decimos que ρ es la **abcisa proyectiva** del punto X en el sistema de coordenadas definido por los puntos A,B,C . Estos son (en función al valor de sus abcisas) respectivamente **el punto impropio, el punto origen y el punto unidad.** Esta abcisa proyectiva coincide con la abcisa no homogénea (para X=B+ρ A, C=B+A). En este sistema de coordenadas no homogéneas, asignamos al punto impropio la abcisa ∞.

Teorema: La razón doble de cuatro puntos se conserva por perspectividades .



Dem.: Sean A_1, A_2, A_3, A_4 cuatro puntos alineados sobre una recta r , y A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 de r' , sus transformados por una perspectividad de centro O . Elijamos un par de puntos B, C en r , y sus transformados B', C' en r' para escribir en coordenadas:
$A_i=B+\gamma_i C$

$A'_i=B'+\gamma'_i\, C'$
$B'=B+\delta\, O$
$C'=C+\mu\, O$
$A'_i=A_i+\mu_i\, O$

entonces
$A'_i=A_i+\mu_i\, O = B+\gamma_i\, C+\mu_i\, O$
$A'_i=B'+\gamma'_i\, C' = B+\delta\, O+\gamma'_i\,(C+\mu\, O) = B+\gamma'_i\, C+(\gamma'_i\,\mu+\delta)\, O$

de donde $\gamma'_i = \gamma_i$ para $i=1,2,3,4$, con lo cual, usando la expresión de la razón doble en coordenadas no homogéneas, resulta

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$$

Definición: Se llama **proyectividad o aplicación proyectiva** de la recta r en la recta r' a toda aplicación biyectiva que conserva las razones dobles.

Teorema: Una proyectividad entre dos rectas está determinada por tres pares de puntos homólogos .

Dem.: Si tomamos tres puntos A,B,C de r y sus transformados A',B',C' de r' , y para cada punto X de r llamamos X' a su transformado, notando con letras minúsculas respectivamente a sus abcisas, escribiendo las razones dobles y utilizando que se conservan, resulta que

$$(c-a)(x-b)(c'-b')(x'-a') = (c'-a')(x'-b')(c-b)(x-a)$$

Despejando x', podemos escribir

$$x' = \frac{xm+p}{xn+q}$$

Esta ecuación representa la proyectividad, si convenimos en que al punto de abcisa $x=-q/n$ corresponde el punto impropio (de abcisa $x'=\infty$). Como por hipótesis la aplicación es biyectiva, debe ser $pn-mq \neq 0$ (lo que además puede verificarse por cálculo directo si A,B,C y respectivamente A',B',C' son distintos).

Recíprocamente, una ecuación con p,q,m,n en el cuerpo R que verifica esta condición define una proyectividad entre las rectas (es trivialmente biyectiva y un cálculo sencillo muestra que conserva las razones dobles).

Observaciones:

- Toda perspectividad es una proyectividad.
- Toda proyectividad es producto de perspectividades (la demostración utiliza la caracterización de perspectividades según los puntos unidos, que no hemos trabajado en el curso).
- El conjunto de las proyectividades entre dos rectas superpuestas es un grupo de transformaciones (es cerrado por producto y todo elemento tiene inverso).

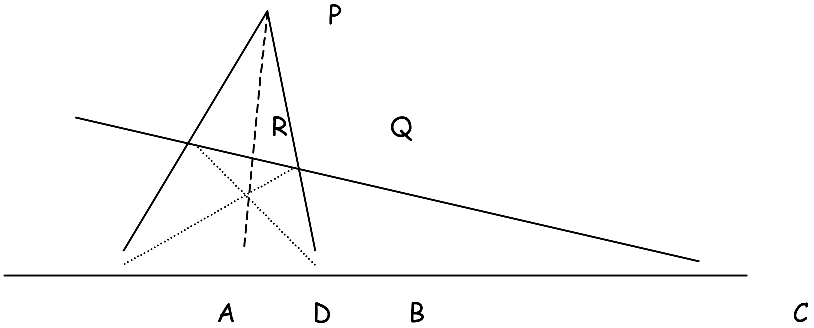
Definición: Se dice que cuatro puntos A,B,C,D de una recta forman una **cuaterna armónica** si su razón doble es igual a -1.

Observación: Si A,B,C,D es armónica, también lo son las cuaternas que resultan de permutar entre sí los elementos del primer par, los del segundo par, o los dos pares entre sí. Por ello decimos que los puntos A,B son conjugados armónicos de C,D (y C,D de A,B).

Observaciones: Incluimos aquí observaciones que corresponden a un tratamiento más general de geometría proyectiva, en espacios vectoriales generales, que la que hemos hecho en el curso. No obstante ello las enunciamos por considerarlas importantes aunque no se pretende que los alumnos conozcan su demostración:

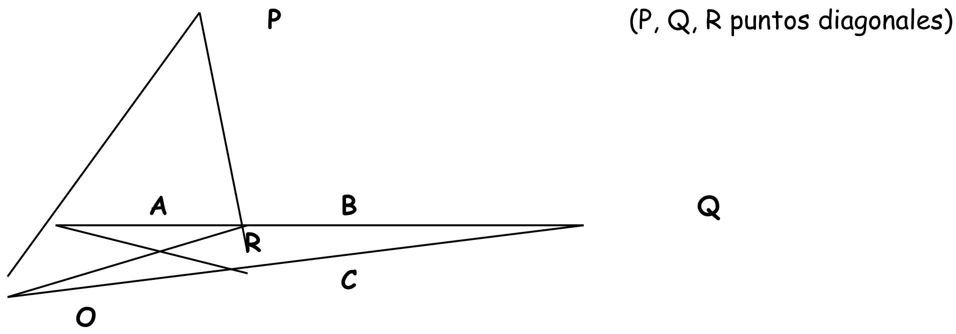
- Cuando se define el espacio proyectivo sobre un cuerpo cualquiera, que los cuatro puntos de una cuaterna armónica sean distintos, caracteriza a los cuerpos de característica distinta de 2 (si no C=D).
- **Teorema de Staudt**: En el cuerpo de los números reales, toda aplicación biyectiva de una recta sobre otra que conserve las cuaternas armónicas, es una proyectividad, o sea, conserva la razón doble de cualquier cuaterna.

Construcción del cuarto armónico: Sean A,B,C tres puntos de una recta r , P un punto que no esté en la recta. Sean Q otro punto de PB , $R=CQ \cap PA$, $S=RB \cap AQ$, $D=PS \cap r$.



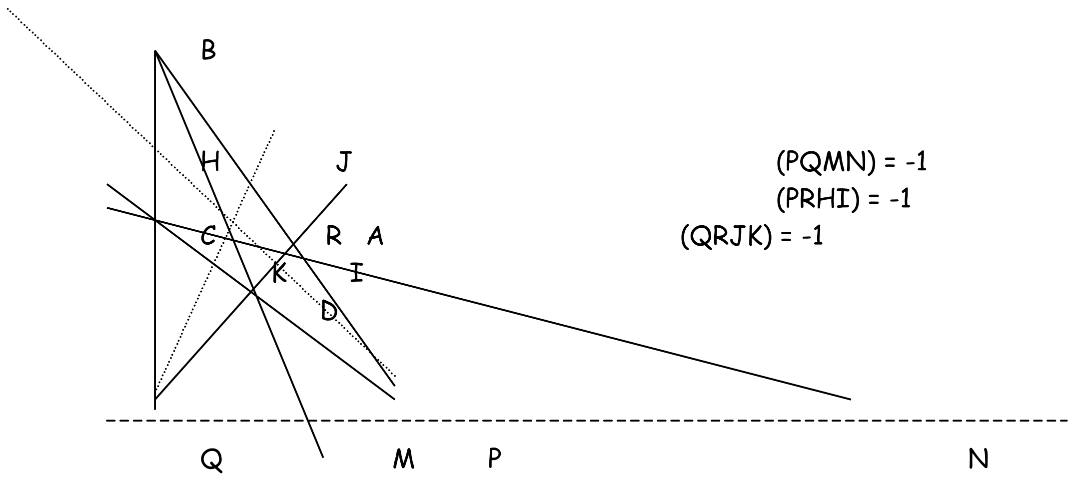
(A,B,C,D)=(P,S,H,D) , proyectando desde R sobre PS ($H=PD\cap RQ$).
(P,S,H,D)=(B,A,C,D) , proyectando desde Q sobre r .
Entonces $\rho= 1/\rho$ de donde $\rho^2 = 1$, y como los 4 puntos son distintos, (A,B,C,D)=-1 .

Definición: Se llama **cuadrivértice** al conjunto de 4 puntos del plano tales que no haya 3 alineados. Los 4 puntos se llaman *vértices* y determinan 6 rectas (*lados*). Los puntos de intersección de dos lados que no son vértices se llaman *puntos diagonales* .



Teorema: En el plano proyectivo real (vale para cuerpos con característica distinta de 2), en cualquier cuadrivértice, dos puntos diagonales son conjugados armónicos de los puntos en que la recta que los une corta a los dos lados opuestos del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal.

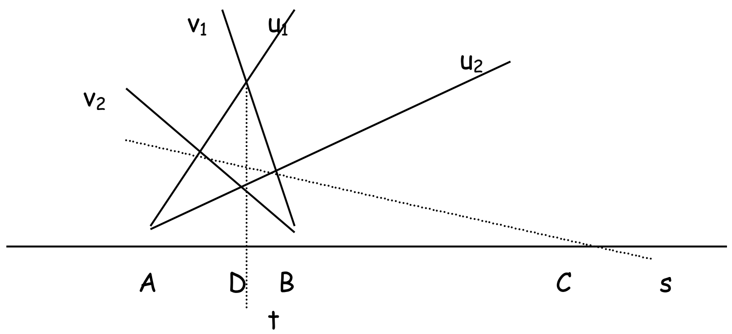
Dem.: Es consecuencia inmediata de la construcción del cuarto armónico.
ABCD cuadrivértice, PQR puntos diagonales



(PQMN) = -1
(PRHI) = -1
(QRJK) = -1

Proposición: Toda colineación entre dos planos subordina una proyectividad entre los elementos de rectas homólogas (y de haces homólogos).

Dem.: Sean r y r' un par de rectas homólogas. Sean A,B,C,D cuatro puntos sobre r en cuaterna armónica. Construyamos un cuadrilátero con dos rectas u_1,u_2 por A y dos rectas v_1,v_2 por B de modo que C y D estén sobre las rectas diagonales s,t respectivamente.



Considerando los puntos y rectas homólogos de los construidos, obtenemos un cuadrivértice según el cual A', B', C', D' están en cuaterna armónica.